

Mathematik für Anwender – Übungsblatt & Tutorium

Stefan KUNIS, Germain POULLOT

April 2026 – Juli 2026

Jedes Übungsblatt enthält die Übungen (in der Regel Übungen 1 bis 4)

Ich (Germain) schreibe einige Übungen auf Englisch und übersetze sie dann ins Deutsche.

Nicht alle Aufgaben werden korrigiert: Für die restlichen Übungen sollten Sie zu den Sitzungen am Donnerstag oder Freitag kommen!

Each exercise sheet contains the exercises of the Übungsblatt (usually exercises 1 to 4)

I (Germain) am writing some exercises in English and then doing the translation to German.

Not all exercises are corrected: for the remaining one, come to the Thursdays' or Fridays' sessions!

Inhaltsverzeichnis

1		3
	Übungsblatt 1	3
	Loesungsblatt 1	5
2		16
	Übungsblatt 2	16
	Loesungsblatt 2	18
3		20
	Übungsblatt 3	20
	Loesungsblatt 3	22
4		25
	Übungsblatt 4	25
	Loesungsblatt 4	27
5		30
	Übungsblatt 5	30
	Loesungsblatt 5	32
6		35
	Übungsblatt 6	35
	Loesungsblatt 6	37
7		40
	Übungsblatt 7	40
	Loesungsblatt 7	42
8		44
	Übungsblatt 8	44
	Loesungsblatt 8	46

9		50
	Übungblatt 9	50
	Loesungblatt 9	52
10		56
	Übungblatt 10	56
	Loesungblatt 10	58
11		62
	Übungblatt 11	62
	Loesungblatt 11	64
12		68
	Übungblatt 12	68
	Loesungblatt 12	70

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 1

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Vandermonde-Determinante, 10 Punkte]

Sei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, und A die $n \times n$ Matrix mit Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie anhand der Determinantenformel, dass für alle $n \geq 2$ gilt: $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Aufgabe 2

[Heisenberg-Gruppe, 2+2+3+2+1+0 Punkte]

Eine "Heisenberg-Matrix" ist eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{für } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Wir notieren

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ als } (a, b, c).$$

und $\mathbb{H}_3 = \{(a, b, c) ; a, b, c \in \mathbb{Z}\}$.

1. Berechnen: $\det(a, b, c)$.
2. Zeigen Sie, dass $(a, b, c) \cdot (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f + ae)$.
3. Bestimmen Sie $(a, b, c)^{-1}$ und $(a, b, c)^n$.
4. Für zwei Matrizen X, Y definieren wir $[X, Y] = X \cdot Y \cdot X^{-1} \cdot Y^{-1}$. Berechnen Sie $[(a, b, c), (d, e, f)]$.
5. Folgern Sie die Menge der Heisenberg-Matrizen $X = (a, b, c)$, sodass für jede Heisenberg-Matrix $Y = (d, e, f)$ gilt: $X \cdot Y = Y \cdot X$.

Bonus (0 Punkte). Zeigen Sie, dass jede Matrix als Produkt von $(1, 0, 0)^m$ und $(0, 1, 0)^n$ geschrieben werden kann, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

[Determinante durch 13 teilbar ist, 10 Punkte]

Zeigen Sie, ohne sie auszurechnen, dass die folgende Determinante durch 13 teilbar ist.

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Hinweis: 169, 273 und 546 durch 13 teilbar sind.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch? Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Wenn es falsch ist, geben Sie ein einfaches und klares Gegenbeispiel an:

- Die Determinante der Summe zweier quadratischer Matrizen ist die Summe der Determinanten dieser Matrizen.
- Die Determinante des Produkts zweier quadratischer Matrizen ist das Produkt der Determinanten dieser Matrizen.
- Die Determinante des Produkts zweier rechteckiger Matrizen ist das Produkt der Determinanten dieser Matrizen.
- Die Determinante einer Matrix mit strikt positiven Einträgen ist strikt positiv.
- Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge.
- Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.
- Die Summe zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.
- Die Determinante der Transponierten einer quadratischen Matrix ist $(-1) \cdot$ (der Determinante der ursprünglichen Matrix).
- Ist eine Matrix invertierbar, so ist die Determinante ihrer Inversen das Inverse ihrer Determinante.

Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen. Sind die Matrizen jeweils invertierbar (**1 Punkte**)? Welche Aussage können Sie über den Rang jeweils machen (**1 Punkte**)?

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme anhand der Cramerschen Regel.

- $$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & -15 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & & & - & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rrcr} 7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Abgabe: 15.04.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 1

Aufgabe 1

[Van der Monde Determinant]

Die Matrix A ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen wir die Aussage mit Induktion.

Induktionsanfang: $n = 2$.

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} x_j - x_i.$$

Induktionsschritt: Nehme nun an, dass die Aussage für $A \in \text{Mat}((n-1) \times (n-1); K)$ von dieser Form gilt. Da die Determinante nicht geändert wird, wenn ein Vielfaches von einer Spalte zu einer anderen addiert wird (Satz 13.2, Satz 13.9), können wir die j -te Spalte mit $-x_1$ multiplizieren und dies zur $j+1$ -ten Spalte addieren, ohne die Determinante zu ändern:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen diese Determinante durch Reihenentwicklung entlang der ersten Reihe:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Von jeder Zeile können wir nun $x_j - x_1$ für $j = 2, \dots, n$ ausfaktorisieren und erhalten

$$\det A = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Nun können wir die Induktionsannahme anwenden, denn diese Matrix ist in der angegebenen Form und der Größe $(n-1) \times (n-1)$:

$$\det A = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 2

[Heisenberg-Gruppe]

1. (a, b, c) triangular ist, so $\det(a, b, c) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
2. Wir haben:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & c+c'+ab' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+a', b+b', c+c'+ab').$$

3. Weiter gilt:

$$(a, b, c)(-a, -b, -c + ab) = (0, 0, 0) = I_3,$$

, so $(a, b, c)^{-1} = (-a, -b, -c + ab)$ und durch unmittelbare Induktion:

$$(a, b, c)^n = (na, nb, nc + \frac{n(n-1)}{2}ab).$$

4. Setzt man nun $X = (a, b, c)$ und $Y = (a', b', c')$, so findet man:

$$[X, Y] = (a, b, c)(a', b', c')(-a, -b, -c+ab)(-a', -b', -c'+a'b') = (a+a', b+b', c+c'+ab')(-a-a', -b-b', -c-c'+ab).$$

5. Beweis $X \cdot Y = Y \cdot X$, dann gilt $[X, Y] = I_3 = (0, 0, 0)$.

Sei $X = (a, b, c)$ mit $[X, Y] = (0, 0, 0)$ für alle $Y = (a', b', c')$. Insbesondere, erhält man:

$$0 = [x, (0, 1, 0)] = a, \quad \text{und} \quad 0 = [x, (-1, 0, 0)] = b.$$

Also gilt $X = (0, 0, c)$. Umgekehrt, wenn $X = (0, 0, c)$, dann gilt für alle $Y = (a', b', c')$ tatsächlich $[X, Y] = (0, 0, 0)$. Schließlich:

$$\{X \in \mathbb{H}_3 ; \forall Y \in \mathbb{H}_3, X \cdot Y = Y \cdot X\} = \{(0, 0, c) ; c \in \mathbb{Z}\}$$

6. Dann gilt für $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$(1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b = (a, 0, 0)(0, b, 0) = (a, b, ab).$$

Daher (zur Erinnerung: $\mathbb{H}_3$ ist nicht kommutativ):

$$(a, b, c) = (1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b (0, 0, 1)^{-ab} = (1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]^{-ab} = (1, 0, 0)^a (0, 1, 0)^b ((0, 1, 0)(1, 0, 0)(0, 1, 0)^{-1}(1, 0, 0)^{-1})^{ab}$$

Aufgabe 3

[Determinant durch 13 teilbar ist]

Ein Determinant ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile eine Linearkombination der anderen Zeilen addiert. Hier addieren wir zur dritten Zeile das Zehnfache der zweiten und das Hundertfache der ersten. Man erhält:

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{pmatrix}.$$

Nun sind alle Einträge der letzten Zeile durch 13 teilbar, und der Determinant ist gleich

$$13 \times \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 42 & 21 & 13 \end{pmatrix}.$$

Dies ist also eine ganze Zahl, die durch 13 teilbar ist.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1.
 - Falsch
 - Wahr
 - Falsch
 - Falsch
 - Wahr
 - Wahr
 - Falsch
 - Falsch
 - Wahr

2. • Wir benutzen die Formel für die Determinante einer 2×2 Matrix (siehe Aufgabe 1):

$$\begin{aligned}\det A &= 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \\ &= 4 - (-6) \\ &= 10.\end{aligned}$$

Da die Determinante ungleich Null ist, ist A invertierbar und hat vollen Rang (2).

- Wir berechnen die Determinante anhand der Regel von Sarrus (Aufgabe 1 b)):

$$\begin{aligned}\det B &= (1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 4) - (1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 4) \\ &= (4 + 4 + 4) - (-2 - 2 + 16) \\ &= 12 - (12) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die Determinante ist Null, also ist B nicht invertierbar und hat nicht vollen Rang (d.h. Rang $B < 3$). In diesem Fall ist Rang $B = 2$, weil Rang 1 bedeuten würde, dass alle Zeilen Vielfache voneinander wären, was nicht der Fall ist.

- Wir berechnen die Determinante anhand von Spaltenentwicklung in der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned}\det C &= (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= ((-2) \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1) \\ &\quad - ((-1) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 1) \\ &= (-4 - 9 - 2) - (-6 - 2 - 6) \\ &= -15 - (-14) \\ &= -1 \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= (1 \cdot (-1) \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot 2) \\ &\quad - (4 \cdot (-1) \cdot 2 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) \\ &= (-3 - 10 - 16) - (-8 - 30 - 2) \\ &= -29 - (-40) \\ &= 11 \\ \det C &= -1 + 11 = 10.\end{aligned}$$

Die Determinante ist ungleich Null, also ist C invertierbar und hat vollen Rang (4).

3. • Die Matrix $A \in \text{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinanten:

$$\begin{aligned}
 \det A &= (2 \cdot 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 1) \\
 &\quad - (2 \cdot 0 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 1) \\
 &= (0 + 120 + 6) - (0 - 45 + 8) = 126 - (-37) = 163 \\
 \det \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -15 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} &= ((-3) \cdot 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-15) \cdot 1) \\
 &\quad - (2 \cdot 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-15) \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \cdot 1) \\
 &= (0 + 80 - 30) - (0 + 225 - 12) = 50 - 213 = -163 \\
 \det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -15 & 4 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix} &= (2 \cdot (-15) \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4) \\
 &\quad - (2 \cdot (-15) \cdot 6 + (-3) \cdot 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 4) \\
 &= (90 - 72 + 24) - (-180 + 27 + 32) = 42 - (-121) = 163 \\
 \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & -15 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= (2 \cdot 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-15) \cdot 6 + (-3) \cdot 3 \cdot 1) \\
 &\quad - ((-3) \cdot 0 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-15) \cdot 1) \\
 &= (0 - 450 - 9) - (0 + 60 - 30) = -459 - 30 = -489
 \end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch $(\frac{-163}{163}, \frac{163}{163}, \frac{-489}{163}) = (-1, 1, -3)$.

- Die Matrix $A \in \text{Mat}(3 \times 3; \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinanten:

$$\begin{aligned}
 \det A &= (3 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + (-5) \cdot 7 \cdot (-1)) \\
 &\quad - ((-5) \cdot (-4) \cdot 4 + 0 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) \\
 &= (-12 + 0 + 35) - (80 + 0 + 3) = 23 - 83 = -60 \\
 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= (1 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) \cdot (-1)) \\
 &\quad - ((-5) \cdot (-4) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1)) \\
 &= (-4 + 0 - 15) - (100 + 0 + 1) = -19 - 101 = -120 \\
 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= (3 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-5) \cdot 7 \cdot 5) \\
 &\quad - ((-5) \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 5) \\
 &= (-9 - 4 - 175) - (60 + 7 - 15) = -188 - 52 = -240 \\
 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & -4 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} &= (3 \cdot (-4) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot (-1)) \\
 &\quad - (1 \cdot (-4) \cdot 4 + 0 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1)) \\
 &= (-60 + 0 - 7) - (-16 + 0 + 9) = -67 - (-7) = -60
 \end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch $(\frac{-120}{-60}, \frac{-240}{-60}, \frac{-60}{-60}) = (2, 4, 1)$.

Aufgabe 5

[Mit ChatGPT]

Es gibt $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$ (nicht > 0), und $\det A = -1$ (nicht 1)...

Aufgabe 6

[Determinantenmultiplikationsformel]

1. Aus Satz 13.4 wissen wir, dass $\det AB \neq 0 \Leftrightarrow AB$ ist invertierbar. Das Gleiche gilt natürlich für A und B . Nehme an, dass $\det A$ und $\det B$ ungleich Null sind. Dann sind A und B beide invertierbar, d.h. es existieren A^{-1} und $B^{-1} \in \text{Mat}(n \times n; K)$. Da $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = I_n$ ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \in \text{Mat}(n \times n; K)$, also ist auch AB invertierbar. Es folgt, dass $\det AB \neq 0$, was aber ein Widerspruch ist. Das heißt, falls $\det AB = 0$ ist entweder $\det A = 0$ oder $\det B = 0$ (oder beides) und es gilt

$$\det(AB) = 0 = (\det A)(\det B).$$

2. Wir berechnen $\varphi(I_n)$, indem wir I_n für A einsetzen:

$$\begin{aligned} \varphi(I_n) &= (\det B)^{-1}(\det I_n B) \\ &= (\det B)^{-1}(\det B) = 1, \end{aligned}$$

also ist φ normiert.

3. Um die Notation einfach zu halten, definieren wir für zwei Vektoren der gleichen Dimension $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ das Skalarprodukt $x * y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Wir schreiben $w_1, \dots, w_n$ für die Spaltenvektoren von B und multiplizieren die entsprechenden Matrizen $(AB, A'B, A''B)$ miteinander:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v'_i + \alpha v''_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ (v'_i + \alpha v''_i) * w_1 & \dots & (v'_i + \alpha v''_i) * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix} \\ A'B &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v'_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v'_i * w_1 & \dots & v'_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix} \\ A''B &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v''_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v''_i * w_1 & \dots & v''_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die v_i Zeilenvektoren und die w_j Spaltenvektoren sind, ist $*$ Matrizenmultiplikation, was mit Vektoren linear ist, d.h.

$$(v'_i + \alpha v''_i) * w_j = v'_i * w_j + \alpha v''_i * w_j.$$

Wir berechnen nun die Determinanten durch Reihenentwicklung entlang der i -ten Reihe.

$$\begin{aligned}
\det AB &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} (v'_i * w_j + \alpha v''_i * w_j) \det(AB)_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \alpha v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
\det A'B &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(A'B)_{ij} \\
\det A''B &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(A''B)_{ij}.
\end{aligned}$$

Weil AB , $A'B$ und $A''B$ sich nur in der i -ten Reihe unterscheiden und genau diese Reihe in $(AB)_{ij}$, $(A'B)_{ij}$ und $(A''B)_{ij}$ wegfällt, sind sie gleich: $(AB)_{ij} = (A'B)_{ij} = (A''B)_{ij}$ für $j = 1, \dots, n$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi(A') &= (\det B)^{-1} (\det A'B) \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(A'B)_{ij} \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
\varphi(A'') &= (\det B)^{-1} (\det A''B) \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(A''B)_{ij} \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
\varphi(A) &= (\det B)^{-1} (\det AB) \\
&= (\det B)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \right) \\
&= (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v'_i * w_j \det(AB)_{ij} + \alpha (\det B)^{-1} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} v''_i * w_j \det(AB)_{ij} \\
&= \varphi(A') + \alpha \varphi(A''),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

4. Nehme an, dass die i -te und j -te Zeilen von A gleich sind für ein $i \neq j$. Dann können wir die Zeilenvektoren von A als $v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n$ und die Spaltenvektor von B als $w_1, \dots, w_n$

schreiben. Wir berechnen das Produkte AB :

$$AB = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 * w_1 & \dots & v_1 * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_i * w_1 & \dots & v_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_i * w_1 & \dots & v_i * w_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n * w_1 & \dots & v_n * w_n \end{pmatrix},$$

also sind zwei Zeilen vom Produkt AB gleich. Da die Determinante alternierend ist, ist $\det AB = 0$, also gilt

$$\varphi(A) = (\det B)^{-1}(\det AB) = (\det B)^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Es folgt, dass φ auch alternierend ist.

5. Aus Satz 13.5 (und Definition 13.1) folgt, dass φ die Determinante ist. Das heißt,

$$\begin{aligned} (\det B)^{-1}(\det AB) &= \varphi(A) = \det A \\ \Rightarrow \det AB &= (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

Aufgabe 7

[Plücker-Koordinaten und Plücker-Relation]

Ein Ebene in $\mathbb{R}^k$ wird durch zwei nicht kollineare Vektoren, sagen wir $\vec{u}, \vec{v}$, definiert. Man kann die Matrix M konstruieren, deren erste Zeile die Koordinaten von $\vec{u}$ in der Standardbasis enthält, und deren zweite Zeile die Koordinaten von $\vec{v}$. Dann berechnet man die Plücker-Koordinaten $(p_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k}$. Es gibt $\frac{k(k-1)}{2}$ Plücker-Koordinaten; wir bezeichnen den Vektor dieser Koordinaten als $p(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}$.

Wenn wir nun eine andere Basis desselben Ebenes wählen, sagen wir $(\vec{u}', \vec{v}')$, existiert eine invertierbare Matrix $A \in M_{2,2}$, so dass

$$\begin{pmatrix} \vec{u}' \\ \vec{v}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die neue Matrix dieser Basis $M' = AM$. Die Plücker-Koordinaten der neuen Matrix sind

$$p'_{i,j} = \det \begin{pmatrix} m_{1,i} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,j} \end{pmatrix} = \det(A) p_{i,j}.$$

Daher liefern alle Parametrisierungen desselben Ebenes dieselben Plücker-Koordinaten bis auf einen multiplikativen Faktor.

Darüber hinaus ist es für einen Ebene $P \subset \mathbb{R}^k$ mit einer Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ unmöglich, dass alle $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ null sind. Denn andernfalls wären für jedes $i < j$ die Vektoren (u_i, v_i) und (u_j, v_j) in $\mathbb{R}^2$ kollinear, da

$$0 = p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist mindestens einer der (u_i, v_i) ungleich null (sonst wäre $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$), sagen wir $v_1 \neq 0$. Dann gilt für alle i :

$$\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_1}{v_1},$$

was genau die Bedingung ist, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind. Dies ist unmöglich, da $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P$ ein Ebene ist.

Damit kann man für einen Ebene $P \subset \mathbb{R}^k$ die Menge

$$p(P) = \{p(\vec{u}, \vec{v}) ; \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P\}$$

konstruieren. Die obige Argumentation zeigt, dass $p(P)$ eine Gerade in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$ ist.

Wir werden zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist. Sei dazu P eine Ebene in $\mathbb{R}^k$ und $(\vec{u}, \vec{v})$ eine Basis von P . Angenommen, wir kennen $p(\vec{u}, \vec{v})$; wir wollen beweisen, dass wir P rekonstruieren können.

Nach dem vorherigen Argument wissen wir, dass mindestens eine der Plücker-Koordinaten $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ ungleich null ist, sagen wir $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v})$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} u_I & u_J \\ v_I & v_J \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, da ihr Determinant $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ ist.

Daher liefert die Matrix $AM = (\vec{x}, \vec{y})$ erneut eine Basis $(\vec{x}, \vec{y})$ von P , wobei die Spalte I von AM

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und die Spalte } J \text{ ist } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$p_{I,j}(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \cdot y_j - 0 \cdot x_j = y_j, \quad p_{i,J}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \cdot y_i - 1 \cdot x_i = -x_i.$$

Da wir alle Plücker-Koordinaten $p(\vec{x}, \vec{y}) = p(\vec{u}, \vec{v})$ kennen, kennen wir die ganze Matrix AM und damit eine Basis von P . Somit ist die Abbildung

$$P \mapsto p(P)$$

injektiv von der Menge der Pläne in $\mathbb{R}^k$ in die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$.

Man kann aus $p(P)$ eine "kanonische" Basis von P konstruieren: Man wählt das kleinste J mit $p_{1,J}(P) \neq 0$, und die beiden Zeilen der folgenden Matrix liefern eine Basis von P (Achtung auf die Indizes):

$$\frac{1}{p_{1,J}} \begin{pmatrix} p_{1,J} & p_{2,J} & p_{3,J} & \cdots & p_{J-1,J} & 0 & -p_{J+1,J} & -p_{J+2,J} & \cdots & -p_{k,J} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{1,J} & p_{1,J+1} & p_{1,J+2} & \cdots & p_{1,k} \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir vier verschiedene Indizes $i < j < k < l$ und die folgende Matrix:

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ \hline m_{1,i} & m_{1,l} & m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} & m_{2,j} & m_{2,l} \end{array} \right).$$

Man kann die Determinante von M blockweise berechnen:

$$\det M = \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,k} \\ m_{2,i} & m_{2,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,j} & m_{2,l} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,k} & m_{2,j} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} \end{vmatrix} = p_{i,k}p_{j,l} + p_{j,k}p_{i,l}.$$

Wenn man die beiden mittleren Spalten von M vertauscht, ergibt sich die Determinante $-\det M$, und erneut blockweise:

$$-\det M = \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ m_{1,i} & m_{1,j} & m_{1,l} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,j} & m_{2,l} & m_{2,l} \end{vmatrix} = p_{i,k} \cdot 0 - p_{i,j}(-p_{j,k}) = p_{i,j}p_{j,k}.$$

Damit erhält man die gewünschte Beziehung. Daraus folgt, dass ein Richtungsvektor einer Geraden in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$, der diese Gleichungen (so viele wie Vierer-Tupel) nicht erfüllt, nicht die Plücker-Koordinaten eines Ebenes in $\mathbb{R}^k$ sein kann: Die Abbildung $P \mapsto p(P)$ ist keine Bijektion.

Anmerkung: Es ist jedoch deutlich schwieriger zu zeigen, dass jede Gerade in $\mathbb{R}^{k(k-1)/2}$, die die Plücker-Relationen erfüllt, tatsächlich von der Form $p(P)$ ist. Die Plücker-Abbildung $P \mapsto p(P)$ liefert sehr wichtige Informationen über die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $\text{Gr}(2, k)$, die Menge der

Pläne in $\mathbb{R}^k$, und verallgemeinert sich zur Untersuchung der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\text{Gr}(n, k)$, der Menge der n -dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^k$.

Aufgabe 8

[Hankel-Determinanten]

1. Wenn die Folge $(b_n)_n$ ab einem bestimmten Index p null ist, dann enthält die Determinante h_n für $n \geq p$ eine Nullspalte:

$$\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Umgekehrt, wenn h_n vollständig null ist, dann gilt zunächst $b_0 = h_0 = 0$, und durch Induktion: Angenommen $b_k = 0$ für alle $k \leq n-1$. Betrachten wir dann h_n (nur die Permutationen, deren Produkt nicht null ist):

$$0 = h_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & b_n & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_n & \dots & b_{2n-2} & b_{2n-1} \\ b_n & b_{n+1} & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \end{vmatrix} = b_n^n.$$

Also folgt durch Induktion, dass $b_n = 0$ für alle n gilt.

2. Wenn die Folge $(b_n)_n$ eine Rekursionsbeziehung erfüllt, sagen wir

$$b_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k} \quad \text{für alle } n,$$

dann kann ab $n = p$ die p -te Spalte der Determinante von h_n als Linearkombination der vorhergehenden Spalten geschrieben werden. Daher ist die Determinante null:

$$\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \begin{pmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_{k+n} \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt, wenn $(h_n)_n$ ab einem bestimmten Index p null ist, bedeutet dies insbesondere, dass die Spalten von h_p linear abhängig sind. Da die Spalten von h_{p-1} es nicht sind, kann man Koeffizienten $(\alpha_k)_k$ finden, sodass

$$b_{p+n} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k} \quad \text{für } n \leq p.$$

Wir zeigen, dass diese Gleichung für alle n gilt. Angenommen, sie gilt für alle $n \leq N + p - 1$. Betrachten wir dann h_N . Die letzte Spalte C_N ist eine Linearkombination der vorhergehenden, sagen wir

$$C_N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k C_k.$$

Insbesondere ergibt sich:

$$b_{N+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{k+j} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{N+j}.$$

Damit gilt die Rekursionsbeziehung für alle Indizes.

3. A_n ist triangular, mit 1 über die Diagonale, so $\det A_n = 1$.

4. Wir haben:

$$\begin{aligned}
A_n H_n^{(b)} A_n^T &= \left[\sum_{k,l=1}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} b_{k+l-2} \binom{j-1}{l-1} \right]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \sum_{l=1}^{n+1} \binom{j-1}{l-1} \binom{i-1}{k-l+1} \right]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2n} b_k \binom{i+j-2}{k} \right]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\
&= [c_{i+j-2}]_{1 \leq i,j \leq n+1} \\
&= H_n^{(c)}.
\end{aligned}$$

5. Schließlich, wenn man die Determinante auf beiden Seiten nimmt, unter Verwendung der Multiplikativität der Determinante und der Tatsache, dass $\det A_n = \det A_n^T = 1$, folgt, dass die Hankel-Transformation unter der Euler-Transformation invariant ist.

Aufgabe 9

[Ein schöner Determinant]

Bezeichnen wir diesen Determinanten mit $D_n(s_1, \dots, s_n)$. Wir beweisen durch vollständige Induktion über n , dass für alle reellen Zahlen $s_1, \dots, s_n$ gilt:

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}).$$

Für die ersten Werte von n lässt sich diese Beziehung leicht überprüfen. Angenommen, die Aussage gilt für $n-1$. Wir zeigen sie nun für n , indem wir die erste Spalte von allen übrigen Spalten subtrahieren. Dann erhalten wir

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & \cdots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & \cdots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1 D_{n-1}(s_2 - s_1, s_3 - s_1, \dots, s_n - s_1).$$

Unter Verwendung der Induktionsannahme erhalten wir

$$D_n(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - s_2 + s_1) \cdots (s_n - s_1 - s_{n-1} + s_1) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}).$$

Man kann dieses Resultat auch ohne Induktion beweisen, indem man die folgende Folge von Zeilenoperationen (in dieser Reihenfolge) ausführt:

$$\begin{aligned}
L_n - L_{n-1} &\rightarrow L_n, \\
L_{n-1} - L_{n-2} &\rightarrow L_{n-1}, \\
&\vdots \\
L_2 - L_1 &\rightarrow L_2.
\end{aligned}$$

Man erhält dann eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge $s_1, s_2 - s_1, \dots, s_n - s_{n-1}$ sind, was das Ergebnis unmittelbar liefert.

Aufgabe 10

[Begleitmatrix]

Durch Entwicklung nach der letzten Spalte erhält man:

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} -x & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} a_k \Delta_k,$$

wobei Δ_k der folgende Determinant ist (wobei $-x$ genau k -mal auf der Diagonalen erscheint):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & -x & 0 & * & \cdots & * \\ & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Dieser Determinant Δ_k lässt sich blockweise berechnen, da die Matrix eine obere Block-Dreiecksmatrix ist. Außerdem sind die Diagonalblöcke selbst wieder Dreiecksmatrizen (der erste ist untere, der zweite obere Dreiecksmatrix). Daraus folgt

$$\Delta_k = (-x)^k \cdot 1^{n-1-k}.$$

Somit erhalten wir

$$\det(A - xI_n) = (-x)^{n-1}(a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} (-1)^k a_k x^k = (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right).$$

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 2

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Mit Integrale, 3+4+3 Punkte]

Sei E der Raum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Man definiert:

$$\varphi : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x t f(t) dt \right)$$

Zeigen Sie, dass $\varphi : E \rightarrow E$ ist eine lineare Abbildung. Ist φ injektiv? surjektiv?

Aufgabe 2

[Symmetrie, 4+3+3 Punkte]

Erinnerung: $\text{Id} : E \rightarrow E$ ist die lineare Abbildung, definiert durch $\text{Id}(x) = x$. Eine *Symmetrie* ist eine lineare Abbildung φ , sodass $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$ gilt.

Man betrachtet die lineare Abbildung $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$s(x, y, z) = (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z).$$

1. Zeigen Sie, dass s eine Symmetrie ist.
2. Bestimmen Sie $F = \text{Ker}(s - \text{Id})$ und geben Sie eine Basis dieses Unterraums an.
3. Bestimmen Sie $G = \text{Ker}(s + \text{Id})$ und geben Sie eine Basis dieses Unterraums an.

Aufgabe 3

[Projektor, 4+3+3 Punkte]

Eine *Projektor* ist eine lineare Abbildung φ , sodass $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

Man betrachtet die lineare Abbildung $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$p(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z).$$

1. Zeigen Sie, dass p eine Projektor ist.
2. Bestimmen Sie $F = \text{Ker}(p)$ und geben Sie eine Basis dieses Unterraums an.
3. Bestimmen Sie $G = \text{Im}(p)$ und geben Sie eine Basis dieses Unterraums an.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Eine lineare Abbildung φ ist injektiv genau dann, wenn $\text{Ker } \varphi = \emptyset$.
- (b) Ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv, so ist sie surjektiv.
- (c) Ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ surjektiv, so ist sie injektiv.
- (d) Ist φ eine lineare Abbildung, so ist auch $x \mapsto -\varphi(2x)$ eine lineare Abbildung.
- (e) Ist die Determinante der zu einer linearen Abbildung φ gehörenden Matrix gleich 0, so ist φ ein Isomorphismus.
- (f) Haben zwei lineare Abbildungen denselben Kern und dasselbe Bild, so sind sie gleich.

2. Konstruieren Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Aussagen oder zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist (jeweils 2 Punkte):

- (a) Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Rang gleich der Dimension ihres Kerns ist.
- (b) Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Bild gleich ihrem Kern ist.
- (c) Sei F ein Unterraum von E , dann existiert eine lineare Abbildung $\varphi : E \rightarrow E$ mit $\text{Ker } \varphi = F$.
- (d) Sei F ein Unterraum von E , dann existiert eine lineare Abbildung $\varphi : E \rightarrow E$ mit $\text{Im } \varphi = F$.

3. Bestimmen Sie den Kern und entscheiden Sie, ob φ injektiv ist (jeweils 1 Punkt), sowie das Bild und entscheiden Sie, ob φ surjektiv ist (jeweils 1 Punkt) für die folgenden linearen Abbildungen:

- (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $\varphi(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$
- (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, mit $\varphi(x, y, z) = (x + y, y - z, z + y, x + y + 2z)$
- (c) $\varphi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ mit $\varphi : f \mapsto (x \mapsto f(x^2))$. Dabei bezeichnet $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ den Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

Abgabe: bis 22.04.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 2

Aufgabe 1

[Mit Integrale, 3+4+3 Punkte]

Für stetige Funktionen f, g und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\varphi(\lambda f + g)(x) = \int_0^x t(\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_0^x t f(t) dt + \int_0^x t g(t) dt = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$. Daher ist φ linear.

$\text{Ker } \varphi$ ist die Menge der stetigen Funktionen, für die $\int_0^x t f(t) dt = 0$ für alle x gilt. Die Funktion $F : x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ ist differenzierbar, und ihre Ableitung ist $F'(x) = x f(x)$ (siehe Vorlesung zur Integration). Da $F(x) = 0$ für alle x gilt, folgt $F'(x) = 0$, also $x f(x) = 0$ für alle x , somit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$. Da f stetig ist, folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ (dieses "0" ist der Nullvektor von E , das heißt die stetige Funktion, die jedes $x \in \mathbb{R}$ auf 0 abbildet). Damit ist φ injektiv.

φ ist nicht surjektiv, da für jede stetige Funktion f die Funktion $\varphi(f)$ differenzierbar ist. Ist also g stetig, aber nicht differenzierbar, so existiert kein $f \in E$ mit $\varphi(f) = g$.

Aufgabe 2

[Symmetrie, 4+3+3 Punkte]

1. Wir berechnen $s \circ s(x, y, z)$. Dazu schreiben wir die Matrixdarstellung von s in der kanonischen Basis:

$$M_s = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \\ -8 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

Die Matrix von $s \circ s$ ist M_s^2 . Eine kurze Rechnung zeigt, dass $M_s^2 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also gilt $s \circ s = \text{Id}$, und s ist eine Symmetrie.

2. Wieder verwenden wir die Matrixdarstellung:

$$F = \text{Ker}(s - \text{Id}) = \text{Ker}(M_s - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \\ -8 & -16 & -8 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man $F = \{(-2x - y, x, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$. Eine Basis von F ist durch die beiden Vektoren $(-2, 1, 0)$ und $(-1, 0, 1)$ gegeben.

3. Wieder verwenden wir die Matrixdarstellung:

$$G = \text{Ker}(s + \text{Id}) = \text{Ker}(M_s + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 4 & 10 & 4 \\ -8 & -16 & -6 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man $G = \{(x, -2x, 4x) ; x \in \mathbb{R}\}$. Eine Basis von F ist durch die beiden Vektoren $(1, -2, 4)$ gegeben.

Beachte, dass die drei Vektoren $(-2, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ und $(1, -2, 4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 3

[Projektor, 4+3+3 Punkte]

1. Wir berechnen $p \circ p(x, y, z)$. Dazu schreiben wir die Matrixdarstellung von p in der kanonischen Basis:

$$M_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix von $p \circ p$ ist M_p^2 . Eine kurze Rechnung zeigt, dass $M_p^2 = M_p$. Also gilt $p \circ p = p$, und p ist eine Symmetrie.

2. Wieder verwenden wir die Matrixdarstellung:

$$F = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(M_p) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens erhält man $F = \{(x, 0, x) ; x \in R\}$. Eine Basis von F ist durch den Vektor $(1, 0, 1)$ gegeben.

3. Wir wissen, dass $\text{Ker } p$ Dimension 1 hat, also hat nach dem Rangsatz $\text{Im } p$ den Rang $3 - 1 = 2$. Es genügt, zwei linear unabhängige Vektoren zu finden, um eine Basis von G zu erhalten. $p(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$ und $p(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ sind linear unabhängige Vektoren, also bilden sie eine Basis von $\text{Im } p$.

Beachte, dass die drei Vektoren $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Falsch
- (b) Wahr
- (c) Wahr
- (d) Wahr
- (e) Falsch
- (f) Falsch

2. (a) Wahr: Sei $(u_1, \dots, u_k)$ eine Basis von F , und $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von E , die diese erweitert. Sei φ die durch die Bilder der Basis definierte Abbildung: $\varphi(u_i) = 0$ und $\varphi(v_j) = v_j$. Dann gilt $\text{Ker } \varphi = F$.
- (b) Wahr: Sei $(u_1, \dots, u_k)$ eine Basis von F , und $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von E , die diese erweitert. Sei φ die durch die Bilder der Basis definierte Abbildung: $\varphi(u_i) = u_i$ und $\varphi(v_j) = 0$. Dann gilt $\text{Im } \varphi = F$.
- (a) Da $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \dots$ ist, hat ihr Bild höchstens Dimension 2. Es gilt $\varphi(1, 0) = (1, 1, 1)$ und $\varphi(0, 1) = (1, -1, 1)$. Diese beiden Vektoren sind linear unabhängig, also $\dim \text{Im } \varphi = 2$ und $\text{Im } \varphi = \text{span}((1, 1, 1), (1, -1, 1))$. Daher ist φ nicht surjektiv ($\dim \text{Im } \varphi \neq \dim \mathbb{R}^3$). Nach dem Rangsatz folgt $\dim \text{Ker } \varphi = 2 - \dim \text{Im } \varphi = 0$, also $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ und φ ist injektiv.
- (b) Da $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \dots$ ist, hat ihr Bild höchstens Dimension 3. Es gilt $\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$, $\varphi(0, 1, 0) = (1, 1, 1, 1)$ und $\varphi(0, 0, 1) = (0, -1, 1, 2)$. Diese drei Vektoren sind linear unabhängig (man kann die Koordinaten entsprechend umordnen, um eine Stufenform zu erhalten), also $\dim \text{Im } \varphi = 3$ und $\text{Im } \varphi = \text{span}((1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 2))$. Daher ist φ nicht surjektiv ($\dim \text{Im } \varphi \neq \dim \mathbb{R}^4$). Nach dem Rangsatz folgt $\dim \text{Ker } \varphi = 3 - \dim \text{Im } \varphi = 0$, also $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ und φ ist injektiv.
- (c) Angenommen, $\varphi(f) = 0$ (die Nullfunktion), dann bedeutet das, dass $f(x^2) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $y = x^2$ für ein $x \in \mathbb{R}$ genau dann gilt, wenn $y \geq 0$, folgt $\text{Ker } \varphi = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) ; f(y) = 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{R}_+\}$. Für $\text{Im } \varphi$ bemerken wir, dass für $g \in \text{Im } \varphi$ die Funktion g gerade ist, d.h. $g(-x) = g(x)$ (denn es existiert f mit $g(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = g(x)$). Umgekehrt sei g eine stetige gerade Funktion, und definiere $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ g(\sqrt{x}) & \text{sonst} \end{cases}$. Da $g(0) = 0$ (weil g gerade ist), ist f stetig. Außerdem gilt $\varphi(f)(x) = g(\sqrt{x^2}) = g(|x|) = g(x)$, wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass g gerade ist. Somit ist $g \in \text{Im } \varphi$. Schließlich gilt $\text{Im } \varphi = \{g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) ; g \text{ ist gerade}\}$.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 3

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[stochastisch Matrix, 6+4 Punkte]

Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *stochastisch*, wenn ihre Einträge nichtnegative reelle Zahlen sind und die Summe der Einträge jeder ihrer Zeilen gleich 1 ist.

1. Zeigen Sie, dass, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, dann $|\lambda| \leq 1$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert ist, und geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

Aufgabe 2

[Transponierte, 1+2+2+1+1+3 Punkte]

Zur Erinnerung: $M_n(\mathbb{R})$ (die Menge der Matrizen der Größe $n \times n$) ist selbst ein Vektorraum der Dimension n^2 . Sie werden dies nicht benötigen, aber eine Basis wird durch die Matrizen $E_{a,b}$ für $a, b \in \{1, \dots, n\}$ gegeben, wobei der Eintrag von $E_{a,b}$ an der Stelle (i, j) gleich 1 ist, falls $i = a$ und $j = b$, und 0 sonst.

Sei $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ definiert durch $\varphi(M) = M^t$, wobei M^t die Transponierte von M bezeichnet (d.h. der Eintrag von M^t an der Stelle (i, j) ist gleich dem Eintrag von M an der Stelle (j, i)).

1. Zeigen Sie, dass φ linear ist.
2. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ . Zeigen Sie durch Betrachtung der Nicht-Diagonaleinträge einer Matrix, dass $\lambda^2 = 1$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass die Matrizen $E_{a,b} - E_{b,a}$ für $1 \leq a < b \leq n$ Eigenvektoren von φ sind. Zu welchem Eigenwert gehören sie?
4. Zeigen Sie, dass die Matrizen $E_{a,b} + E_{b,a}$ für $1 \leq a < b \leq n$ Eigenvektoren von φ sind. Zu welchem Eigenwert gehören sie?
5. Zeigen Sie, dass die Matrizen $E_{a,a}$ für $1 \leq a \leq n$ Eigenvektoren von φ sind. Zu welchem Eigenwert gehören sie?
6. Folgern Sie, dass φ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3

[Matrix mit Parameter, 2+2+2+2+2 Punkte]

Sei m eine reelle Zahl und A die durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

definierte Matrix.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A (in Abhängigkeit von m). Welche Eigenwerte hat A ?
2. Bestimmen Sie $\ker(A - I_3)$ für $m = 1$ (Hinweis: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).
3. Bestimmen Sie $\ker(A - 2I_3)$ für $m = 2$.
4. Für welche Werte von m ist A diagonalisierbar?
5. Sei $m = 2$. Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Es existiert eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit genau einem von Null verschiedenen Eintrag, die nicht diagonalisierbar ist.
- (b) Ist eine Matrix A diagonalisierbar, so ist auch A^2 diagonalisierbar.
- (c) Ist A^2 diagonalisierbar, so ist A diagonalisierbar.
- (d) Ist eine Matrix A invertierbar und diagonalisierbar, so ist auch A^{-1} diagonalisierbar.
- (e) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, aber über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.
- (f) Jede Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ besitzt mindestens einen Eigenwert.
- (g) Die Summe zweier diagonalisierbarer Matrizen ist stets diagonalisierbar.
- (h) Eine Matrix besitzt stets nur endlich viele Eigenvektoren.

2. Diagonalisiere die folgenden Matrizen (Geben Sie außerdem die Übergangsmatrix von der Standardbasis zur Basis der Eigenvektoren an) (**jeweils 3 Punkte**):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Erklären Sie ohne Rechnung, warum die folgende Matrix nicht diagonalisierbar ist (**2 Punkte**):

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Abgabe: bis 29.04.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 3

Aufgabe 1

[stochastisch Matrix, 6+4 Punkte]

1. Sei $Mx = \lambda x$. Sei i so gewählt, dass $x_i \neq 0$ (dies existiert, da x nicht der Nullvektor ist) und $|x_i|$ maximal ist. Betrachte dann den Betrag der i -ten Zeile von $Mx = \lambda x$:

$$\left| \sum_k m_{ik} x_k \right| = |\lambda x_i|.$$

Für die linke Seite gilt:

$$\left| \sum_k m_{ik} x_k \right| \leq \sum_k |m_{ik}| |x_k| \leq \sum_k m_{ik} |x_i| = \left(\sum_k m_{ik} \right) |x_i| = |x_i|.$$

Dabei wurde die Maximalität von $|x_i|$ benutzt. Somit folgt

$$|\lambda| |x_i| \leq |x_i| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq 1.$$

2. Es gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k m_{1k} \\ \vdots \\ \sum_k m_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M zum Eigenwert 1.

Aufgabe 2

[Transponierte, 1+2+2+1+1+3 Punkte]

1. $\varphi(aM + N) = (aM + N)^t = aM^t + N^t = a\varphi(M) + \varphi(N)$, also ist φ eine lineare Abbildung.
2. Sei $\varphi(M) = \lambda M$, also $M^t = \lambda M$. Auf Koordinatenebene bedeutet dies $m_{ji} = \lambda m_{ij}$ für alle i, j . Falls M einen nichtverschwindenden Diagonaleintrag m_{kk} besitzt, folgt $m_{kk} = \lambda m_{kk}$, also $\lambda = 1$. Andernfalls gibt es, da $M \neq 0$, einen nichtdiagonalen Eintrag $m_{ij} \neq 0$ mit $i \neq j$. Dann gilt

$$m_{ij} = \lambda m_{ji} = \lambda(\lambda m_{ij}),$$

also $\lambda^2 = 1$. Insgesamt folgt $\lambda^2 = 1$, also $\lambda \in \{-1, 1\}$.

3. Es gilt $E_{ab}^t = E_{ba}$. Daher

$$\varphi(E_{ab} - E_{ba}) = E_{ba} - E_{ab} = -(E_{ab} - E_{ba}),$$

also ist $E_{ab} - E_{ba}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 .

4. Es gilt $E_{ab}^t = E_{ba}$. Daher

$$\varphi(E_{ab} + E_{ba}) = E_{ba} + E_{ab} = E_{ab} + E_{ba},$$

also ist $E_{ab} + E_{ba}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $+1$.

5. Es gilt $\varphi(E_{aa}) = E_{aa}^t = E_{aa}$, also ist E_{aa} ein Eigenvektor zum Eigenwert $+1$.
6. Die Vektoren $E_{ab} - E_{ba}$, $E_{ab} + E_{ba}$ und E_{aa} sind linear unabhängig, da keine nichttriviale Linearkombination die Nullmatrix ergibt. Damit erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert -1 (für $a < b$) und $n + \frac{n(n-1)}{2}$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert $+1$. Insgesamt sind dies n^2 linear unabhängige Eigenvektoren, und da $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$, ist φ diagonalisierbar.

Aufgabe 3

[Matrix mit Parameter, 2+2+2+2+2 Punkte]

1. Man berechnet das charakteristische Polynom von A . Es gilt

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-m & X-m \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\chi_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 2-m & X-m \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-m).$$

Die Eigenwerte von A sind also 1, 2 und m . Insbesondere hat A , falls $m = 1$ oder $m = 2$, nur zwei verschiedene Eigenwerte.

Falls $m \neq 1$ und $m \neq 2$, besitzt A drei verschiedene Eigenwerte, also ist A diagonalisierbar.

2. **Fall $m = 1$:** Dann ist $\chi_f(X) = (X-1)^2(X-2)$. Der Eigenwert 2 hat algebraische Vielfachheit 1, der Eigenwert 1 hat algebraische Vielfachheit 2.

A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim \operatorname{Ker}(A - I_2) = 2$.

Sei $u = (x, y, z)$. Dann

$$Au = u \iff \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Eine Basis von $\operatorname{Ker}(A - I_2)$ ist also $(1, 1, 0)$.

Die Dimension ist $1 \neq 2$, also ist A nicht diagonalisierbar.

3. **Fall $m = 2$:** Dann hat 2 algebraische Vielfachheit 2 und 1 algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$. Für $u = (x, y, z)$ gilt

$$Au = 2u \iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x \end{cases}.$$

Eine Basis von $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ ist gegeben durch $(1, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$.

4. Also $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = 2$, somit ist A diagonalisierbar.

5. Wir diagonalisieren nun A (für $m = 2$).

Für den Eigenwert 1 erhält man wieder die Basis $(1, 1, 0)$.

Setze

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (0, 1, 0), \quad w = (1, 0, 1).$$

Dann ist (u, v, w) eine Eigenbasis und die Darstellungsmatrix lautet

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = PDP^{-1}.$$

Man berechnet

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt rekursiv

$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Schließlich erhält man

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

(a) Wahr ($A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(b) Wahr

(c) Falsch ($A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(d) Wahr ($A = PDP^{-1}$, mit 0 nicht ein eigenzahl, so $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ mit D^{-1} diagonale)

(e) Wahr

(f) Wahr

(g) Falsch

(h) Falsch

2. Charakteristisches Polynomen $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-1)$ so diagonalisierbar $A = PDP^{-1}$ mit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 0 & 12 & 18 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (via $\text{Ker}(A + 4I_3)$, $\text{Ker}(A - I_3)$ und $\text{Ker}(A - 2I_3)$).

Charakteristisches Polynomen $\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. diagonalisierbar $B = PDP^{-1}$ mit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (via $\text{Ker}(B - I_3)$ und $\text{Ker}(B - 2I_3)$).

Charakteristisches Polynomen $\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. diagonalisierbar $C = PDP^{-1}$ mit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ 1 & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (via $\text{Ker}(C - I_3)$ und $\text{Ker}(C - 2I_3)$).

3. Der einzige mögliche Eigenwert ist π (da A eine Dreiecksmatrix ist, lässt sich $\chi_A = \det(A - \lambda I_3) = \pm(\lambda - \pi)^3$ sofort berechnen). Aber $A - \pi I_3$ ist offensichtlich nicht die Nullmatrix, daher gilt $\dim \text{Ker}(A - \pi I_3) \neq 3$.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 4

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Habe ich ein Skalarprodukt?, 10 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Man definiert $\varphi : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Zeigen Sie, dass φ genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn $\text{tr}(A) > 0$ und $\det(A) > 0$ gilt (Hinweis: $\text{tr}(A) = a + c$).

Aufgabe 2

[Skalarprodukt mit Polynomen, 2+2+2+2+2 Punkte]

Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome (endlichen, aber unbeschränkt hohen Grades).

Betrachte die beiden folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}[X]^2$ nach $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \overline{P|Q} &= \sum_{k=0}^d p_k \cdot q_k & \text{wobei } P = \sum_{k=0}^d p_k X^k \text{ und } Q = \sum_{k=0}^d q_k X^k \\ \langle P, Q \rangle &= \int_0^1 P(x) \cdot Q(x) \, dx \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $\overline{P|Q}$ und $\langle P, Q \rangle$ Skalarprodukte auf $\mathbb{R}[X]$ sind.
2. Finden Sie ein Polynom F , so dass für alle Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ gilt: $\overline{P|F} = P(0)$.
3. Wir wollen zeigen, dass ein solches Polynom nicht existiert, wenn man $\overline{\cdot|\cdot}$ durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ersetzt.
Angenommen, es existiert ein Polynom G , so dass für alle Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ gilt: $\langle G, P \rangle = P(0)$. Zeigen Sie, dass G ein Maximum M auf $[0, 1]$ besitzt.
4. Sei $P_n : x \mapsto (1 - x)^n$. Zeigen Sie, dass $\langle G, P_n \rangle \leq \frac{M}{n+1}$.
5. Folgern Sie, dass $\langle G, P_n \rangle \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$. Schließen Sie daraus einen Widerspruch (und dass G nicht existieren kann).

Aufgabe 3

[Cauchy–Schwarz, 5+5 Punkte]

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Zeigen Sie, dass $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$ gilt, und untersuchen Sie die Fälle der Gleichheit.

Nun nehmen wir an, dass $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$ gilt. Zeigen Sie, dass $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$ gilt (man kann dabei $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ setzen und zeigen, dass es sich um ein Skalarprodukt handelt).

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) In jedem reellen Skalarproduktraum gilt: Aus $\langle x, y \rangle = 0$ folgt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- (b) Gilt $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, so sind x und y linear abhängig.
- (c) In der Cauchy–Schwarz–Ungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn einer der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.
- (d) Gilt $\|x\| = \|y\|$ und $\langle x, y \rangle = \|x\|^2$, so folgt $x = y$.
- (e) Gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle y , so ist $x = 0$.
- (f) Gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, so sind x und y orthogonal.
- (g) Ist $x \neq 0$, so ist die Abbildung $y \mapsto \langle x, y \rangle$ ein lineares Funktional.
- (h) Gilt $\|x\| = \|y\| = 1$, so ist $|\langle x, y \rangle| \leq 1$.
- (i) Gilt $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ für alle x , so folgt $y = z$.

2. Man setze $u = (1, 0, 0)$ und $v = (1, 1, 2)$. Berechnen Sie:

- (a) $\{u\}^\perp$
- (b) $\{v\}^\perp$
- (c) $\{u, v\}^\perp$

3. Definieren die folgenden Abbildungen ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (Geben Sie eine kurze Begründung)?

- (a) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$;
- (b) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_2y_2$;
- (c) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.
- (d) $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$

Abgabe: 06.05.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 4

Aufgabe 1

[Habe ich ein Skalarprodukt?, 10 Punkte]

Wie auch immer, φ ist bilinear und symmetrisch, mit $\varphi(0,0) = 0$, unabhängig von den Werten von a, b und c .

φ ist genau dann positiv definit, wenn

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \text{für alle } x_1, x_2.$$

Es gilt jedoch:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man $a > 0$. Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man $c > 0$. Also gilt $\text{tr}(A) > 0$.

Für die Determinante kann man ein Argument von Cauchy verwenden: Man betrachtet das Polynom zweiten Grades

$$at^2 + 2bt + c = \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0.$$

Da dieses Polynom auf $\mathbb{R}$ keine Nullstelle hat (es ist stets > 0), ist seine Diskriminante strikt negativ. Es gilt aber

$$\Delta = 4b^2 - 4ac = -4\det(A).$$

Also folgt $\det(A) > 0$.

Betrachten wir nun die Umkehrung. Ist $\det(A) > 0$, so hat

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ein strikt konstantes Vorzeichen für alle t . Insbesondere für $t = 0$ folgt, dass dieses Polynom das Vorzeichen seines Wertes bei 0 hat, also das von c .

Da $\text{tr}(A) = a + c > 0$ und $\det(A) = ac - b^2 > 0$, folgt $ac > 0$, also haben a und c dasselbe Vorzeichen. Wegen $a + c > 0$ gilt dann $a > 0$ und $c > 0$, und schließlich

$$\forall t, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0.$$

Außerdem gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a > 0.$$

Seien nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Falls $x_2 \neq 0$, setze $t = \frac{x_1}{x_2}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

also:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_2^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0.$$

Falls $x_2 = 0$, so gilt:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) > 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass φ genau dann ein Skalarprodukt ist, wenn $\text{tr}(A) > 0$ und $\det(A) > 0$.

Aufgabe 2

[Skalarprodukt mit Polynomen, 2+2+2+2+2 Punkte]

Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome (endlichen, aber unbeschränkt hohen Grades).Betrachte die beiden folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}[X]^2$ nach $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\overline{P|Q} &= \sum_{k=0}^d p_k \cdot q_k & \text{wobei } P = \sum_{k=0}^d p_k X^k \text{ und } Q = \sum_{k=0}^d q_k X^k \\ \langle P, Q \rangle &= \int_0^1 P(x) \cdot Q(x) dx\end{aligned}$$

1. $\overline{\cdot|\cdot}$ ist das übliche Skalarprodukt zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$, während $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein übliches Skalarprodukt auf stetigen Funktionen ist. Man kann überprüfen, dass beide symmetrisch, bilinear und positiv definit sind; wir zeigen dies für $\langle \cdot, \cdot \rangle$, welches offensichtlich symmetrisch ist:

$$\langle \lambda P + R, Q \rangle = \int_0^1 (\lambda P + R) \cdot Q = \lambda \int_0^1 P \cdot Q + \int_0^1 R \cdot Q = \lambda \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle$$

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(x)^2 dx \geq 0, \text{ da } P(x)^2 \geq 0$$

Außerdem gilt: Wenn $\langle P, P \rangle = 0$, dann ist $P(x)^2 = 0$ für alle $x \in]0, 1[$ (denn das Integral einer positiven Funktion ist genau dann 0, wenn die Funktion auf dem Integrationsintervall gleich 0 ist). Da P ein Polynom ist, kann es nicht unendlich viele Nullstellen haben, außer im Fall $P = 0$ (d. h. das Nullpolynom). Folglich gilt: Wenn $\langle P, P \rangle = 0$, dann ist $P(x) = 0$ für alle $x \in]0, 1[$, und da $]0, 1[$ unendlich ist, folgt $P = 0$.

2. Sei $F = 1$, und sei P ein beliebiges Polynom. Dann gilt $\overline{P|F} = \sum_k p_k f_k$, wobei $f_0 = 1$ und $f_k = 0$ für alle $k \geq 1$, also $\overline{P|F} = p_0 = P(0)$.
3. Da G ein Polynom ist, ist es insbesondere eine stetige Funktion auf $[0, 1]$ und besitzt daher ein Maximum, das angenommen wird. Es existieren also $x_0 \in [0, 1]$ und $M \in \mathbb{R}$ mit $G(x_0) = M$ und $M \geq G(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ (Vorsicht: Dies gilt nicht für alle $x \in \mathbb{R}$).
4. Sei $P_n : x \mapsto (1 - x)^n$. Dann gilt:

$$\langle P_n, G \rangle = \int_0^1 (1 - x)^n G(x) dx \leq \int_0^1 (1 - x)^n \cdot M dx = M \left[\frac{-1}{n+1} (1 - x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$$

5. Auf die gleiche Weise besitzt G ein Minimum auf $[0, 1]$, sei es $m \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{m}{n+1} \leq \langle P_n, G \rangle \leq \frac{M}{n+1}.$$

Für $n \rightarrow +\infty$ konvergieren beide Seiten gegen 0, also $\langle P_n, G \rangle \rightarrow 0$.

Andererseits gilt $P_n(0) = 1$ für alle n , also $P_n(0) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow +\infty$.

Wenn nun $\langle P, G \rangle = P(0)$ für alle Polynome P gilt, dann insbesondere auch für alle P_n . Doch aus $\langle P_n, G \rangle = P_n(0)$ folgt durch Grenzübergang $0 = 1$. Dieser Widerspruch zeigt, dass ein solches G nicht existieren kann.

Aufgabe 3

[Cauchy-Schwarz, 5+5 Punkte]

Man verwendet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit:

$$(x + 2y + 3z)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle^2 \leq \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|^2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2 \leq 1 \times (1^2 + 2^2 + 3^2) = 14.$$

Der Gleichheitsfall tritt ein, wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

Umgekehrt ist φ tatsächlich ein Skalarprodukt (man kann die Aufgabe über Skalarprodukte betrachten, die von 2×2 -Matrizen erzeugt werden). Daher kann man es verwenden, um die Cauchy-

Schwarz-Ungleichung für das Skalarprodukt zwischen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ zu betrachten:

$$(x+y+z)^2 = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right)^2 \leq \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) \leq 1 \times \left(1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{11}{6}.$$

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Wahr
- (b) Wahr
- (c) Wahr
- (d) Wahr
- (e) Wahr
- (f) Wahr
- (g) Wahr
- (h) Wahr
- (i) Wahr

2. Man setze $u = (1, 0, 0)$ und $v = (1, 1, 2)$. Berechnen Sie:

- (a) $\{u\}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0\} = \text{span}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$
- (b) $\{v\}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \langle (x, y, z), (1, 1, 2) \rangle = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 2z = 0\} = \text{span}((1, -1, 0), (2, 0, -1))$
- (c) $\{u, v\}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 0 \text{ and } x + y + 2z = 0\} = \text{span}((0, 2, -1))$

3. Definieren die folgenden Abbildungen ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ (Geben Sie eine kurze Begründung)?

- (a) Falsch, nicht (bi)linear.
- (b) Falsch, nicht positiv: $\varphi((1, -1), (1, -1)) = 4 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -3 < 0$.
- (c) Falsch, nicht positiv: $\varphi((1, -1), (1, -1)) = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 10 \cdot 1 \cdot (-1) = -5 < 0$.
- (d) Falsch, nicht definit: $\varphi((1, 0), (1, 0)) = (1 + 1) \cdot (0 + 0) = 0$ mit $(1, 0) \neq 0$.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 5

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Gram-Determinante, 5+5 Punkte]

Sei E ein euklidischer Raum. Für $x_1, \dots, x_p$ Vektoren aus E nennt man die *Gram-Matrix* die Matrix in $M_p(\mathbb{R})$, die durch $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$ definiert ist. Die Determinante dieser Matrix heißt *Gram-Determinante* der Vektoren $x_1, \dots, x_p$ und wird mit $G(x_1, \dots, x_p)$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie, dass $(x_1, \dots, x_p)$ genau dann eine linear unabhängige Familie ist, wenn $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$ gilt.
2. Es sei nun $(x_1, \dots, x_p)$ eine linear unabhängige Familie und $F = \text{span}(x_1, \dots, x_p)$. Sei außerdem $x \in E$. Zeigen Sie, dass

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

wobei $d(x, F)$ der *Abstand* des Punktes x vom F ist, das heißt $d(x, F) = \min\{\|x - y\| ; y \in F\}$. Sie können annehmen, dass $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ gilt, wobei p_F die orthogonale Projektion auf F ist, falls Sie dies benötigen.

Aufgabe 2

[Minimierer von Multi-Metrik, 3+3+2+2 Punkte]

Wir betrachten $\mathbb{R}$ als metrischen Raum, versehen mit verschiedenen Abständen. Im gesamten Verlauf der Aufgabe seien reelle Zahlen $a_1, \dots, a_n$ fest gegeben; es ist möglich, dass $a_i = a_j$ für gewisse $i \neq j$ gilt.

1. Sei $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Abstand definiert durch $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Sei $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch $\Delta(y) = \sum_{k=1}^n \delta(a_k, y)$. Zeigen Sie, dass die Minimierer von Δ die Modi von $(a_1, \dots, a_n)$ sind. (Zur Erinnerung: Ein "Modus" einer Liste von Zahlen ist ein Wert aus der Liste, der am häufigsten vorkommt.)
2. Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Abstand definiert durch $d(x, y) = |x - y|$. Sei $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch $D(y) = \sum_{k=1}^n d(a_k, y)$. Zeigen Sie, dass die Minimierer von D die Medianwerte von $(a_1, \dots, a_n)$ sind. (Zur Erinnerung: Ein "Median" einer Liste von Zahlen ist ein Wert, sodass die Hälfte der Zahlen größer und die andere Hälfte kleiner als dieser Wert ist.)
3. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch $f(x, y) = (x - y)^2$. Zeigen Sie, dass f zwei Axiome einer Metrik erfüllt, jedoch nicht das dritte.
4. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch $F(y) = \sum_{k=1}^n f(a_k, y)$. Zeigen Sie, dass der Minimierer von F das arithmetische Mittel von $(a_1, \dots, a_n)$ ist.

Aufgabe 3

[Harmonische Metrik, 2+2+3+3 Punkte]

Sei $X =]0, +\infty[$. Für $x, y \in X$ setzen wir

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

1. Zeigen Sie, dass δ eine Metrik auf X ist.
2. Bestimmen Sie $B(1, 1)$ bezüglich dieser Metrik.
3. Ist die Menge $A =]0, 1]$ bezüglich dieser Metrik beschränkt? Ist sie abgeschlossen?
4. Bestimmen Sie die offenen Kugeln mit Radius r bezüglich dieser Metrik.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Jeder metrische Raum besitzt mindestens eine nichtleere offene Menge.
 - (b) Jede abgeschlossene Kugel in einem metrischen Raum ist eine abgeschlossene Menge.
 - (c) Der Durchschnitt zweier offener Mengen in einem metrischen Raum ist stets offen.
 - (d) Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.
 - (e) In einem metrischen Raum ist jede einelementige Menge offen.
 - (f) Der Rand einer offenen Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist immer nichtleer.
 - (g) Es gibt ≥ 3 Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
 - (h) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
 - (i) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist ihre Transponierte.
 - (j) Jede orthogonale Matrix hat Determinante gleich 1.
 - (k) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert aus jeder linear unabhängigen Familie stets eine Orthonormalbasis.
 - (l) Jede Rotationsmatrix in $\mathbb{R}^2$ ist orthogonal.
 - (m) Jede orthogonale Matrix stellt entweder eine Rotation in $\mathbb{R}^n$ dar.
2. Untersuchen Sie für jede der folgenden Matrizen, ob sie orthogonal ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: 13.05.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 5

Aufgabe 1

[Gram-Determinante, 5+5 Punkte]

1. Zunächst bemerken wir: Ist $(x_1, \dots, x_p)$ eine linear abhängige Familie, so ist einer der Vektoren, sagen wir der j -te, eine Linearkombination der anderen. Diese Relation überträgt sich auf die Gram-Matrix, deren j -te Spalte dann eine Linearkombination der übrigen ist. Daher gilt $G(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Angenommen nun, dass $G(x_1, \dots, x_p) = 0$. Dann sind die Spaltenvektoren der Gram-Matrix linear abhängig. Das bedeutet, dass es Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, nicht alle null, gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, p$ gilt: $\langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, x_i \rangle = 0$.

Wir erhalten somit p Gleichungen. Multiplizieren wir die erste mit λ_1 , die zweite mit λ_2 , usw., und summieren diese Gleichungen, so ergibt sich aufgrund der Bilinearität des Skalarprodukts:

$$\langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \rangle = \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p\|^2 = 0.$$

Das bedeutet, $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$, und somit ist die Familie $(x_1, \dots, x_p)$ linear abhängig.

2. Schreiben wir nun $x = u + v$ mit $u \in F$ und $v \in F^\perp$, und erinnern wir daran, dass $d(x, F) = \|v\|$. Betrachtet man die zugehörige Gram-Matrix und nutzt die Orthogonalität von v zu den Vektoren $x_1, \dots, x_p$, so erhält man:

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 + \|v\|^2 & \langle u, x_1 \rangle & \cdots & \langle u, x_p \rangle \\ \langle x_1, u \rangle + 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p, u \rangle + 0 & \langle x_p, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Aufgrund der Multilinearität der Determinante und durch Betrachtung der ersten Spalte folgt:

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = G(u, x_1, \dots, x_p) + \begin{vmatrix} \|v\|^2 & \langle u, x_1 \rangle & \cdots & \langle u, x_p \rangle \\ 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_p, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Da $G(u, x_1, \dots, x_p) = 0$ gilt (weil die Familie $(u, x_1, \dots, x_p)$ linear abhängig ist), ist die zweite Determinante gleich $\|v\|^2 G(x_1, \dots, x_p)$, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 2

[Minimierer von Multi-Metrik, 3+3+2+2 Punkte]

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Falls $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, dann gilt $\delta(x, a_i) = 1$ für alle i , also ist $\Delta(x) = n \geq \Delta(a_k)$. Falls $x = a_i$ für ein i , sei m_i die Anzahl der Indizes $j \in [n]$ mit $a_j = a_i$. Dann gilt $\delta(a_i, a_j) = 0$ für diese j und $= 1$ sonst. Also ist $\Delta(a_i) = n - m_i$.

Ist a_k ein Modalwert von $(a_1, \dots, a_n)$, dann ist m_k maximal unter den m_i , also ist $\Delta(a_k)$ minimal (unter allen $\Delta(x)$ für $x \in \mathbb{R}$).

Umgekehrt: Ist $\Delta(x)$ minimal, so gilt $\Delta(x) = \Delta(a_i)$, also ist die Anzahl der Vorkommen von x in $(a_1, \dots, a_n)$ maximal, d. h. x ist ein Modalwert von $(a_1, \dots, a_n)$.

2. Sei $d_k : y \mapsto d(a_k, y)$. Jede Funktion d_k ist differenzierbar außer in a_k , daher ist D auf

$$\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \text{ differenzierbar. Es gilt } d'_k(y) = \begin{cases} -1 & \text{falls } y < a_k, \\ +1 & \text{falls } y > a_k. \end{cases}$$

Somit ist $D'(y) = (\text{Anzahl der } a_k \text{ größer als } y) - (\text{Anzahl der } a_k \text{ kleiner als } y)$.

Daher nimmt D ein Minimum (für $D'(y) = 0$) genau dann an, wenn es gleich viele a_k gibt, die kleiner als y sind, wie solche, die größer sind, d. h. genau dann, wenn y ein Median von $(a_1, \dots, a_n)$ ist.

3. f ist offensichtlich symmetrisch. Außerdem ist f positiv und es gilt: $f(x, y) = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.

Jedoch erfüllt f die Dreiecksungleichung nicht, denn:

$$f(0, 1) = 1 > f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Sei $f_k : y \mapsto f(a_k, y)$. Jede Funktion f_k ist differenzierbar mit $f'_k(y) = 2(y - a_k)$. Daher ist F differenzierbar mit $F'(y) = 2 \sum_k (y - a_k)$.
Somit gilt $F'(y) = 0$ genau dann, wenn $\sum_k (y - a_k) = 0$, also genau dann, wenn $n \cdot y = \sum_k a_k$.
Dies ist äquivalent dazu, dass y das arithmetische Mittel von $(a_1, \dots, a_n)$ ist.
Dies ist tatsächlich ein Minimum, da F eine Summe quadratischer Funktionen ist.

Aufgabe 3

[Harmonische Metrik, 2+2+3+3 Punkte]

1. δ ist eine Metrik. In der Tat gilt:

- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.
- $\delta(x, z) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| = \delta(x, y) + \delta(y, z)$.
- $\delta(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

Also ist (X, δ) ein metrischer Raum.

2. Sei nun $x > 0$. Dann gilt $x \in B(1, 1)$ genau dann, wenn $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < 1$. Wir lösen diese Ungleichung: $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| < 1 \iff -1 < \frac{1}{x} - 1 < 1 \iff 0 < \frac{1}{x} < 2 \iff x > \frac{1}{2}$. Also ist $B(1, 1) =]\frac{1}{2}, +\infty[$.
3. Die Menge A ist nicht beschränkt. Sei nämlich $a > 0$ fest. Für $n \geq 2$ gilt $1/n \in A$. Außerdem ist $\delta(a, 1/n) = \left| n - \frac{1}{a} \right| \rightarrow +\infty$. Daher ist A in keiner Kugel $B(a, R)$ enthalten und somit nicht beschränkt.

Nun zeigen wir, dass A abgeschlossen ist. Sei (x_n) eine Folge in A , die bezüglich δ gegen ein $\ell > 0$ konvergiert. Das bedeutet, dass die Folge $(1/x_n)$ gegen $1/\ell$ (im üblichen Sinn) konvergiert. Durch Invertieren folgt, dass (x_n) gegen ℓ konvergiert. Da $x_n \in [0, 1]$ für alle n , gilt dies auch für ℓ . Zudem ist $\ell \neq 0$, also $\ell \in A$.

4. Sei nun $x_0 \in X$ und $r > 0$. Wir bestimmen $B(x_0, r)$. Es gilt

$$x \in B(x_0, r) \iff \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < r \iff \frac{1}{x_0} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + r.$$

Beim Invertieren muss man beachten, dass alle Größen positiv sind, weshalb zwei Fälle zu unterscheiden sind.

Fall 1: $r \geq \frac{1}{x_0}$. Dann liefert die linke Ungleichung keine zusätzliche Information, da $x > 0$ gilt. Somit:

$$x \in B(x_0, r) \iff x > \frac{1}{\frac{1}{x_0} + r} = \frac{x_0}{1 + rx_0}.$$

Fall 2: $r < \frac{1}{x_0}$. Dann gilt:

$$x \in B(x_0, r) \iff \frac{1}{\frac{1}{x_0} - r} > x > \frac{1}{\frac{1}{x_0} + r} \iff \frac{x_0}{1 + rx_0} < x < \frac{x_0}{1 - rx_0}.$$

Zusammenfassend erhält man:

$$B(x_0, r) = \begin{cases}]\frac{x_0}{1+rx_0}, +\infty[& \text{falls } r \geq \frac{1}{x_0}, \\]\frac{x_0}{1+rx_0}, \frac{x_0}{1-rx_0}[& \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Wahr (die Menge *itself*)
- (b) Wahr
- (c) Wahr
- (d) Wahr
- (e) Falsch
- (f) Wahr
- (g) Falsch ($\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind)
- (h) Wahr
- (i) Wahr
- (j) Falsch (+1 oder -1)
- (k) Wahr
- (l) Wahr
- (m) Falsch

2. Eine Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = I$ gilt (äquivalent: die Spalten bilden ein Orthonormalsystem).

- (a) Für $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so

$$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Also ist A_1 orthogonal.

- (b) Für $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $A_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, so

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \neq I.$$

Also ist A_2 nicht orthogonal.

- (c) Für $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind die Spalten orthonormal:

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1, \quad \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1, \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

und ihre Skalarprodukte sind 0. Daher gilt $A_3^T A_3 = I$, also ist A_3 orthogonal.

- (d) Für $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, die Box (1, 2) of $A_4 A_4^T$ ist $i \neq 0$. Also ist A_4 nicht orthogonal.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 6

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1 [Newton-Verfahren für $\sqrt{2}$, 10 Punkte]

Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die ersten 5 Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ zu berechnen.

Hinweis: $f(x) = x^2 - 2$ ist eine geeignete Funktion.

Aufgabe 2 [Page Rank Algorithmus, 1+3+4+2 Punkte]

1. Sei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine diagonale reelle $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $f_D(x) = Dx$, stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.
2. Zeigen Sie, dass f_D genau dann eine Kontraktion von $\mathbb{R}^n$ ist, wenn für alle i gilt: $|\lambda_i| < 1$.
3. Sei A eine reelle symmetrische Matrix, deren Eigenwerte alle (streng) einen Betrag kleiner als 1 haben. Sei $f_A : x \mapsto Ax$. Zeigen Sie, dass f_A eine Kontraktion von $\mathbb{R}^n$ ist, und folgern Sie, dass f_A genau einen Fixpunkt besitzt (welcher ist das?).
4. Sei A eine reelle symmetrische Matrix, deren Eigenwerte alle (streng) einen Betrag kleiner als 1 haben, mit Ausnahme eines Eigenwerts, der genau 1 ist. Sei $(x_n)_n$ die Folge, die definiert ist, indem man x_0 als einen beliebigen Vektor in $\mathbb{R}^n$ wählt und $x_{n+1} = Ax_n$ setzt. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_n$ gegen einen Eigenvektor von A konvergiert, der zum Eigenwert 1 gehört.

Aufgabe 3 [symmetrischer linear Abbildung, 2+3+3+2 Punkte]

Sei E ein euklidischer Raum und u eine symmetrischer linear Abbildung $E \rightarrow E$, das heißt, u erfüllt

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Sei $\mathbb{S} = \{x \in E ; \langle x, x \rangle = 1\}$ die Einheitskugel von E und $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, definiert durch

$$\varphi(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

1. Zeigen Sie, dass φ auf $\mathbb{S}$ ein Maximum annimmt. Bezeichnen Sie mit x_0 einen Punkt, in dem dieses Maximum erreicht wird.
2. Sei y ein Einheitsvektor, der orthogonal zu x_0 ist. Für $t \in \mathbb{R}$ setze man

$$x(t) = (\cos t) x_0 + (\sin t) y \quad \text{und} \quad f(t) = \langle u(x(t)), x(t) \rangle.$$

Zeigen Sie, dass f in 0 ein Maximum besitzt.

3. Folgern Sie daraus, dass y orthogonal zu $u(x_0)$ ist.
4. Folgern Sie daraus, dass x_0 ein Eigenvektor von u ist.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:
 - (a) Ist jede konvergente Folge in einem metrischen Raum beschränkt?
 - (b) Eine beschränkte Folge in einem metrischen Raum ist konvergent.
 - (c) Bildet jede stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab?
 - (d) Gilt: Wenn eine Abbildung jede konvergente Folge auf eine konvergente Folge abbildet, dann ist sie stetig?
 - (e) Ist eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist?
 - (f) Ist das Bild jeder offenen Menge unter einer stetigen Abbildung wieder offen?
 - (g) Gilt: Wenn eine Folge konvergiert, dann konvergieren alle ihre Teilfolgen gegen denselben Grenzwert?
 - (h) Ist die Verkettung zweier stetiger Abbildungen wieder stetig?
2. Welche der folgenden Mengen sind kompakt (je 1 Punkt)? Welche der folgenden Mengen sind wegzusammenhängend (je 1 Punkt)? Geben Sie sehr kurze Begründungen an (wir arbeiten mit der üblichen Metrik auf $\mathbb{R}^n$).
 - (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}$, wobei $\mathbb{S}$ der Einheitskreis ist.
 - (b) $\text{Ker } \varphi$, wobei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine (nichttriviale) lineare Abbildung ist und $m < n$.
 - (c) $\{(t, \cos t) ; t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{(t, \sin t) ; t \in [-\pi, \pi]\}$ in $\mathbb{R}^2$.
 - (d) $\{(t, \cos t) ; t \in [-\pi, \pi]\} \cap \{(t, \sin t) ; t \in [-\pi, \pi]\}$ in $\mathbb{R}^2$.
 - (e) $\{(t, \cos t) ; t \in [-\pi, \pi]\} \triangle \{(t, \sin t) ; t \in [-\pi, \pi]\}$ in $\mathbb{R}^2$, wobei $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die symmetrische Differenz ist.
 - (f) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ in $\mathbb{R}$.

Abgabe: 20.05.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 6

Aufgabe 1

[Newton-Verfahren für $\sqrt{2}$, 10 Punkte]

Wenden wir das Newton–Raphson-Verfahren an, um eine Nullstelle der Funktion $f : x \mapsto x^2 - 2$ zu bestimmen. Wir können mit $x_0 = 2$ beginnen (ein beliebiger Startwert ist möglich) und definieren dann eine Folge durch $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Solange kein $f'(x_n)$ gleich 0 ist, konvergiert diese Folge gegen einen Wert x_∞ mit $f(x_\infty) = 0$, das heißt $x_\infty^2 - 2 = 0$. Falls $x_\infty \geq 0$, dann ist $x_\infty = \sqrt{2}$, andernfalls $x_\infty = -\sqrt{2}$.

Durch Berechnung der ersten Werte von x_n erhält man immer genauere Näherungen von $\sqrt{2}$. Wenn die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten kleiner als 10^{-6} ist, wissen wir, dass die ersten fünf Dezimalstellen korrekt sind.

Für diese spezielle Funktion f gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$.

Daher:

$$\begin{aligned}x_0 &= 2 \\x_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\x_2 &= \frac{17}{12} \approx 1.41667 \\x_3 &= \frac{577}{408} \approx 1.414215 \\x_4 &= \frac{665857}{470832} \approx 1.41421356237\end{aligned}$$

Die ersten fünf Dezimalstellen der letzten beiden Zeilen stimmen überein, also handelt es sich um eine Näherung von $\sqrt{2}$ auf fünf Dezimalstellen: Wir können hier aufhören.

Aufgabe 2

[Page Rank Algorithmus, 1+3+4+2 Punkte]

1. f_D ist eine lineare Abbildung, also ist sie stetig (dies kann einfach aus der Vorlesung zitiert werden). Es gibt mehrere Beweise dafür; zum Beispiel: Fixiere $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Sei m so gewählt, dass $|\lambda_m|$ maximal ist, und setze $\delta = \frac{\varepsilon}{|\lambda_m|}$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\| \leq \delta$:

$$\|f_D(y) - f_D(x)\| = \|D(y - x)\| = \sqrt{\sum_k \lambda_k^2 (y_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\lambda_m^2} \sqrt{\sum_k (y_k - x_k)^2} = |\lambda_m| \cdot \|y - x\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \delta = \varepsilon.$$

Also ist f_D stetig.

2. f_D ist genau dann eine Kontraktion, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|f_D(y) - f_D(x)\| < \|y - x\|$. Wir zeigen, dass f_D genau dann eine Kontraktion ist, wenn $|\lambda_i| < 1$ für alle $i \in [n]$ gilt. Aus der vorherigen Rechnung folgt $\|f_D(y) - f_D(x)\| \leq |\lambda_m| \cdot \|y - x\|$, wobei m so gewählt ist, dass $|\lambda_m|$ maximal ist. Ist also $|\lambda_i| < 1$ für alle $i \in [n]$, so ist f_D eine Kontraktion. Umgekehrt: Ist f_D eine Kontraktion, so gilt insbesondere für jeden Eigenwert λ_i mit zugehörigem Eigenvektor x :

$$\|f_D(x) - f_D(0)\| < \|x - 0\|.$$

Da $f_D(0) = 0$ und $f_D(x) = \lambda_i x$ gilt, folgt

$$\|\lambda_i x\| < \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda_i| \cdot \|x\| < \|x\|.$$

Da x ein Eigenvektor ist, gilt $\|x\| > 0$, also folgt $|\lambda_i| < 1$.

3. Da A eine reelle symmetrische Matrix ist, ist sie diagonalisierbar und besitzt sogar eine **orthonormale** Basis aus Eigenvektoren. Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine solche Basis mit $Ab_i = \lambda_i b_i$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n, \quad y = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n.$$

Sei λ_m der Eigenwert mit größtem Betrag. Dann gilt (die dritte Gleichheit folgt daraus, dass $\mathcal{B}$ orthonormal ist):

$$\|f_A(x) - f_A(y)\| = \|A(x-y)\| = \left\| \sum_k \lambda_k (\alpha_k - \gamma_k) b_k \right\| = \sqrt{\sum_k \lambda_k^2 (\alpha_k - \gamma_k)^2} \leq \sqrt{\lambda_m^2} \sqrt{\sum_k (\alpha_k - \gamma_k)^2} = |\lambda_m| \cdot \|x-y\|$$

Da nach Voraussetzung $|\lambda_m| < 1$ gilt, folgt $\|f_A(x) - f_A(y)\| < \|x - y\|$, also ist f_A eine Kontraktion. Damit besitzt f_A genau einen Fixpunkt; da $f_A(0) = 0$ gilt, ist 0 dieser eindeutige Fixpunkt.

4. Sei $\mathcal{B} = (b, b_1, \dots, b_{n-1})$ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren von A , so dass $Ab = 1 \cdot b$ und $Ab_i = \lambda_i b_i$ mit $|\lambda_i| < 1$ für $1 \leq i \leq n-1$. Sei

$$x_0 = \alpha b + \alpha_{0,1} b_1 + \dots + \alpha_{0,n-1} b_{n-1}.$$

Wir definieren $y_0 = x_0 - \alpha b$ und $y_{n+1} = Ay_n$. Wir zeigen durch Induktion, dass $x_n = \alpha b + y_n$ gilt. Für $n = 0$ ist dies klar. Angenommen, die Aussage gilt für ein festes n . Dann folgt:

$$x_{n+1} = Ax_n = \alpha Ab + Ay_n = \alpha b + y_{n+1},$$

da b ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Weiter gilt $y_0 \in \text{Span}(b_1, \dots, b_{n-1})$ und auch $y_n \in \text{Span}(b_1, \dots, b_{n-1})$, da dieser Raum unter A invariant ist. Auf diesem Raum ist A jedoch eine Kontraktion (nach dem vorherigen Teil), also gilt $y_n \rightarrow 0$. Folglich gilt $x_n \rightarrow \alpha b$, was ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist.

Im Allgemeinen ist es für eine beliebige Matrix A eine gute Methode, die Folge $x_{n+1} = Ax_n$ (oder mit Normierung: $x_{n+1} = \frac{1}{\|Ax_n\|} Ax_n$) zu betrachten, um schnell gegen einen Eigenvektor von A zu konvergieren, der zum Eigenwert mit größtem Betrag gehört.

Aufgabe 3

[symmetrischer linear Abbildung, 2+3+3+2 Punkte]

1. S ist eine kompakte Teilmenge von E (da es eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Vektorraums ist). Außerdem ist φ eine stetige Abbildung von S nach $\mathbb{R}$ als Verkettung stetiger Abbildungen (u und das Skalarprodukt). Daher nimmt φ auf S tatsächlich ein Maximum an.
2. Nach dem Satz des Pythagoras ist für jedes reelle t der Vektor $x(t)$ ein Einheitsvektor, und es gilt $f(t) = \varphi(x(t)) \leq \varphi(x_0) = f(0)$. Somit besitzt f ein Maximum bei 0.
3. Entwickelt man f , so erhält man unter Verwendung der Symmetrie von u : $f(t) = \cos^2 t \langle u(x_0), x_0 \rangle + 2 \cos t \sin t \langle u(y), x_0 \rangle + \sin^2 t \langle u(y), y \rangle$.
Die Funktion f ist differenzierbar, und da sie bei 0 ein Maximum besitzt, ist ihre Ableitung dort gleich null. Es gilt jedoch $f'(0) = 2 \langle u(x_0), y \rangle$.
Daraus folgt, dass $u(x_0)$ orthogonal zu y ist.
4. Nach der vorherigen Frage ist $u(x_0)$ orthogonal zu allen Vektoren, die orthogonal zu x_0 sind. Folglich ist $u(x_0)$ kollinear zu x_0 , was genau bedeutet, dass x_0 ein Eigenvektor von u ist. Damit haben wir in dieser Aufgabe gezeigt, dass jeder symmetrische Endomorphismus einen Eigenvektor besitzt.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:
 - (a) Wahr
 - (b) Falsch ($f : x \mapsto |x|$)
 - (c) Falsch
 - (d) Wahr
 - (e) Wahr
 - (f) Falsch
 - (g) Wahr ($Df = f$ für f lineare)
 - (h) Wahr
 - (i) Wahr
 - (j) Wahr
2. Welche der folgenden Mengen sind kompakt (je 1 Punkt)? Welche der folgenden Mengen sind wegzusammenhängend (je 1 Punkt)? Geben Sie sehr kurze Begründungen an (wir arbeiten mit der üblichen Metrik auf $\mathbb{R}^n$).
 - (a) Nicht kompakt (gibt $x_n = (0, n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}$ nicht beschränkt), nicht wegzusammenhängend (keine Weg von $(0, 0)$ nach $(2, 0)$).
 - (b) Nicht kompakt (für $x \in \text{Ker } \varphi$, es gibt $n \cdot x \in \text{Ker } \varphi$ nicht beschränkt), aber wegzusammenhängend (Seien $x_1, \dots, x_p$ eine Basis von $\text{Ker } \varphi$, und seien $y, z \in \text{Ker } \varphi$ mit $y = \sum_{i=1}^p a_i x_i$ und $z = \sum_{i=1}^p b_i x_i$. Jeder Weg in $\mathbb{R}^p$, der $(a_1, \dots, a_p)$ mit $(b_1, \dots, b_p)$ verbindet, wird auf einen Weg von y nach z abgebildet).
 - (c) Kompakt ($\subseteq [-\pi, +\pi] \times [-1, +1]$ und es ist abgeschlossen, weil es die Vereinigung der Bildmengen zweier stetiger Funktionen ist), und wegzusammenhängend ($\{(t, \cos t); t \in [-\pi, \pi]\}$ und $\{(t, \sin t); t \in [-\pi, \pi]\}$ sind Wegen).
 - (d) Kompakt ($\subseteq [-\pi, +\pi] \times [-1, +1]$ und es ist abgeschlossen, weil es die Vereinigung der Bildmengen zweier stetiger Funktionen ist), nicht wegzusammenhängend (es handelt sich um isolierte Punkte).
 - (e) Nicht kompakt, nicht wegzusammenhängend (es ist die Differenz der beiden vorherigen Mengen, also aus Kurven ohne die Punkte [eine Zeichnung wäre willkommen])
 - (f) Nicht kompakt, nicht wegzusammenhängend (*kompliziert*: Cauchy-Folgen konvergieren in $\mathbb{Q}$ nicht notwendigerweise, und das Bild einer stetigen Funktion in $\mathbb{R}$ ist ein Intervall und kann daher nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sein)

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025
Übungsblatt 7

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Nichtdifferenzierbarkeit der Norm, 5+5 Punkte]

Sei E ein euklidischer Vektorraum. Wir wollen zeigen, dass die Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, mit $f(x) = \|x\|$ im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Fixiere ein beliebiges $u \in E$ mit $u \neq 0$, und definiere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, mit $g(t) = f(t \cdot u)$.

Zeigen Sie:

1. Falls f in $0 \in E$ differenzierbar ist, dann ist auch g in $0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar.
2. Folgern Sie daraus die Behauptung.

Aufgabe 2

[stetig und injektiv, 5+5 Punkte]

Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Mithilfe der Wegzusammenhängigkeit soll das folgende klassische Resultat gezeigt werden: "Ist f stetig und injektiv, so ist f streng monoton."

Dazu definiert man $C = \{(x, y) \in I^2 ; x > y\}$ sowie $F(x, y) = f(x) - f(y)$, für $(x, y) \in C$.

1. Zeigen Sie, dass $F(C)$ ein Intervall ist.
2. Folgern Sie daraus die Behauptung.

Aufgabe 3

[Satz von Darboux, 3+4+3 Punkte]

Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Ferner sei $A = \{(x, y) \in I \times I ; x < y\}$.

1. Zeigen Sie, dass A eine wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Für $(x, y) \in A$ definieren wir

$$g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Zeigen Sie: $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

3. Zeigen Sie, dass $f'(I)$ ein Intervall ist.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $f(K)$ kompakt.
- (b) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.
- (c) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an.
- (d) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subseteq X$ wegzusammenhängend, so ist auch $f(A)$ wegzusammenhängend.
- (e) Jede konstante Funktion zwischen metrischen Räumen ist stetig.
- (f) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(X)$ unbeschränkt.
- (g) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ wegzusammenhängend und gilt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ wegzusammenhängend.
- (h) Jede differenzierbare Funktion besitzt ein stetiges totales Differential.
- (i) Existiert das totale Differential einer Funktion in einem Punkt, so ist die Funktion in diesem Punkt stetig.
- (j) Das totale Differential einer linearen Abbildung ist die Nullabbildung.
- (k) Ist das totale Differential einer Funktion in einem Punkt die Nullabbildung, so ist die Funktion in einer Umgebung dieses Punktes konstant.
- (l) Das totale Differential einer Funktion in einem Punkt ist eindeutig bestimmt.

2. Bestimmen Sie das Differential im Punkt a_o der folgenden Funktionen (**2 Punkte** jede):

- (a) $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, definiert durch $M \mapsto M^2$, für ein beliebiges a_o .
- (b) $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ (Erinnerung: $GL_n(\mathbb{R})$ ist die Menge der invertierbaren Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$), definiert durch $M \mapsto M^{-1}$, für a_o die Einheitsmatrix.
- (c) $f : E \rightarrow E$ für einen euklidischen Raum E , definiert durch $f(x) = \|x\|$, für $a_o \neq 0$.
- (d) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \langle g(x) \mid g(x) \rangle$, wobei g differenzierbar ist. Für beliebiges a_o .

Abgabe: 27.05.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 7

Aufgabe 1

[Differentiale der Determinantenabbildung, 2+1+2+3+2+0 Punkte]

1. Angenommen, f sei in $0 \in E$ differenzierbar.

Die Abbildung $h : \mathbb{R} \rightarrow E$, mit $h(t) = tu$ ist linear und daher differenzierbar. Da $g = f \circ h$, folgt mit der Kettenregel, dass auch g in 0 differenzierbar ist.

2. Nun gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = f(tu) = \|tu\| = |t| \|u\|$. Da $\|u\| > 0$, ist g also ein positives Vielfaches der Betragsfunktion: $g(t) = \|u\| |t|$.

Die Funktion $t \mapsto |t|$ ist jedoch in 0 nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t| - 0}{t} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t| - 0}{t} = -1.$$

Die einseitigen Ableitungen stimmen also nicht überein.

Folglich ist g in 0 nicht differenzierbar — Widerspruch.

Daher kann $f(x) = \|x\|$ in 0 nicht differenzierbar sein.

Aufgabe 2

[stetig und injektiv, 5+5 Punkte]

1. Zunächst bemerken wir, dass C wegzusammenhängend ist, da C konvex ist (Skizze!). Da F stetig ist, ist auch $F(C)$ wegzusammenhängend als Teilmenge von $\mathbb{R}$, also ein Intervall. Da f injektiv ist, gilt $0 \notin F(C)$. Denn aus $F(x, y) = f(x) - f(y) = 0$ würde folgen, dass $f(x) = f(y)$, also wegen der Injektivität $x = y$, im Widerspruch zu $(x, y) \in C$.

2. Da $F(C)$ ein Intervall ist und 0 nicht enthält, gilt entweder $F(C) \subset]0, +\infty[$ oder $F(C) \subset]-\infty, 0[$.

Im ersten Fall gilt für alle $x > y$: $f(x) - f(y) > 0$, also $f(x) > f(y)$, und damit ist f streng monoton wachsend.

Im zweiten Fall gilt für alle $x > y$: $f(x) - f(y) < 0$, also $f(x) < f(y)$, und damit ist f streng monoton fallend.

In beiden Fällen ist f also streng monoton.

Aufgabe 3

[Satz von Darboux, 3+4+3 Punkte]

1. A ist konvex und daher wegzusammenhängend.

2. Sei $z \in g(A)$. Dann existiert $(x, y) \in A$ mit $z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $a \in I$ mit $z = g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(a)$, also $z \in f'(I)$. Damit ist $g(A) \subset f'(I)$. Sei nun umgekehrt $z = f'(a) \in f'(I)$. Sei (b_n) eine Folge in I , die von oben gegen a konvergiert, also $b_n > a$ und $b_n \rightarrow a$. Nach der Definition der Ableitung in a gilt $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a, b_n)$. Da $g(a, b_n) \in g(A)$ für alle n , folgt $z \in \overline{g(A)}$. Somit gilt insgesamt $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

3. Da g stetig ist und A wegzusammenhängend ist, ist auch $g(A)$ wegzusammenhängend. Als wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist $g(A)$ daher ein Intervall.

Folglich ist auch $\overline{g(A)}$ ein Intervall. Da $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$, muss auch $f'(I)$ selbst ein Intervall sein.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) **Wahr:** Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.
- (b) **Falsch:** Gegenbeispiel: $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in sich selbst, aber nicht kompakt.
- (c) **Falsch:** $x \mapsto x^3$ hat kein Minimum/Maximum
- (d) **Wahr:** Stetige Bilder wegzusammenhängender Mengen sind wegzusammenhängend.

- (e) **Wahr:** Konstante Funktionen sind stets stetig.
 - (f) **Falsch:** Tatsächlich ist $f(X)$ kompakt und daher beschränkt.
 - (g) **Wahr:** Wegen $A \cap B \neq \emptyset$ kann man Wege zusammensetzen.
 - (h) **Falsch:** Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ f ist differenzierbar in 0, aber f' ist dort nicht stetig.
 - (i) **Wahr:** Totale Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.
 - (j) **Falsch:** Für eine lineare Abbildung L gilt $DL = L$.
 - (k) **Falsch:** Beispiel: $f(x) = x^2$. Dann ist $Df(0) = 0$, aber f ist nicht lokal konstant.
 - (l) **Wahr:** Das totale Differential ist eindeutig bestimmt.
2. Bestimmen Sie das Differential im Punkt a_0 der folgenden Funktionen:
- (a) $Df_A(H) = AH + HA$ weil gibt es: $(A + H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$.
 - (b) $Df_{I_n}(H) = -H$ weil gibt es $(I_n + H)(I_n + H + H^2 + \dots + H^k + \dots) = I_n$, so $(I_n + H)^{-1} = I_n + H + H^2 + \dots + H^k + \dots$.
 - (c) $Df_x(h) = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$ weil gibt es $f(x + h)^2 = \langle x + h, x + h \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|^2$, so
 $f(x + h) = \|x\| \sqrt{1 + 2\frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^4}}$ und $\frac{d}{dz} \sqrt{1 + z} = \frac{1}{2}(1 + z)$
 - (d) $Df_x(h) = 2\langle f(x), Dg_x(h) \rangle$

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 8

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Differentialle der Determinantenabbildung, 2+1+2+3+2+0 Punkte]

Sei $n \geq 2$.

1. Zeigen Sie, dass die Determinantenabbildung auf $M_n(\mathbb{R})$ unendlich oft differenzierbar ist.
2. Seien $1 \leq i, j \leq n$ und $f_{i,j}(t) = \det(I_n + tE_{i,j})$. Was ist f ?
3. Leiten Sie daraus den Wert von

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n)$$

ab.

4. Bestimmen Sie daraus die Differentiale der Determinantenabbildung in I_n .
5. Zeigen Sie, dass für eine invertierbare Matrix A gilt:

$$D \det(A)(H) = \det(A) \cdot \operatorname{Tr}(A^{-1} \cdot H).$$

(Bonus, 0 Punkt) Zeigen Sie, dass sich dieses Ergebnis auf jede Matrix aus $M_n(\mathbb{R})$ erweitern lässt, indem man $\det(A) A^{-1}$ durch die transponierte Kofaktormatrix von A ersetzt.

Aufgabe 2

[differenzierbar?, 3+3+4 Punkte]

Sei die Funktion f definiert durch:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig in $(0, 0)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ partielle Ableitungen besitzt.
3. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3

[arctan Gleichung, 3+4+3 Punkte]

Es sei daran erinnert, dass $\arctan$ die Umkehrfunktion von $\tan$ ist (d.h. $\tan(\arctan(x)) = x$): $\arctan$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert und beliebig oft differenzierbar, mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Man definiert

$$f(x, y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1. Zeigen Sie, dass der Definitionsbereich D von f die Vereinigung von drei bogenweise zusammenhängenden offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Zeigen Sie, dass f von Klasse C^1 auf D ist, und berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Vereinfachen Sie den Ausdruck von f .

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:
 - (a) Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.
 - (b) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar.
 - (c) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann differenzierbar in einem Punkt, wenn alle partiellen Ableitungen in diesem Punkt existieren.
 - (d) Existieren alle partiellen Ableitungen einer Funktion und sind diese stetig, so ist die Funktion differenzierbar.
 - (e) Ist eine Funktion in einem Punkt differenzierbar, so existieren in diesem Punkt alle Richtungsableitungen.
 - (f) Existieren in einem Punkt alle Richtungsableitungen, so ist die Funktion dort differenzierbar.
 - (g) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar.
 - (h) Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sofern sie existiert, ist eine lineare Abbildung.
 - (i) Ist die Ableitung einer Funktion überall gleich null, so ist die Funktion auf zusammenhängenden Mengen konstant.
 - (j) Die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen ist wieder differenzierbar.
2. Bestimmen Sie das Differential im Punkt a_o der folgenden Funktionen:
 - (a) $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$ für beliebiges a_o .
 - (b) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ für beliebiges a_o .
 - (c) $f(x, y) = (y \sin x, \cos x)$ für beliebiges a_o .
3. Begründen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie ihre Jacobi-Matrix.
 - (a) $f(x, y, z) = (\frac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y)$.
 - (b) $f(x, y) = (xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2))$.

Abgabe: 03.06.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 8

Aufgabe 1

[Differentialle der Determinantenabbildung, 2+1+2+3+2+0 Punkte]

1. Die Determinante lässt sich als Polynom in den Einträgen der Matrix ausdrücken und ist daher in jedem Punkt (d. h. in jeder Matrix) differenzierbar.
2. Falls $i \neq j$, dann ist $I_n + tE_{i,j}$ eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix mit 1-en auf der Diagonale, also gilt $f_{i,j}(t) = 1^n = 1$. Falls $i = j$, dann ist $I_n + tE_{i,j}$ eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge alle 1 sind außer einem Eintrag, der $1+t$ ist. Daher gilt $f_{i,i}(t) = 1^{n-1} \cdot (1+t) = 1+t$.
3. Nach Definition der partiellen Ableitung gilt

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) = f'_{i,j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases},$$

wobei die zweite Gleichheit aus der vorherigen Aufgabe folgt.

4. Erinnern wir uns daran, dass $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Basis des Raums der $n \times n$ -Matrizen ist. Daher lässt sich jede Matrix H schreiben als $H = \sum_{i,j} h_{i,j} E_{i,j}$, und mit den partiellen Ableitungen erhalten wir:

$$D \det_{I_n}(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \text{Tr}(H).$$

5. Für jede invertierbare Matrix A gilt, unter Verwendung der vorherigen Aufgabe:

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det(A) \cdot \det(I_n + A^{-1}H) \\ &= \det(A) \cdot (1 + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)) = \det(A) + \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|). \end{aligned}$$

Also gilt

$$D \det_A(H) = \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}H).$$

(Bonus, 0 Punkte) Es gilt $\det(A) \cdot A^{-1} = {}^t \text{comat}(A)$, also die Transponierte der Komatrix von A . Dieser Ausdruck ist auch dann wohldefiniert, wenn A nicht invertierbar ist. Außerdem sind sowohl

$$A \mapsto (H \mapsto D \det_A(H)) \quad \text{als auch} \quad A \mapsto (H \mapsto \text{Tr}({}^t \text{comat}(A) \cdot H))$$

stetige Abbildungen (in der Variablen A) auf dem Raum der linearen Abbildungen von $M_n(\mathbb{R})$ in sich.

Nach der vorherigen Aufgabe stimmen diese Abbildungen auf $GL_n(\mathbb{R})$ (der Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen) überein. Weiterhin ist $GL_n(\mathbb{R})$ *dicht* in $M_n(\mathbb{R})$ (dies wurde im Kurs nicht bewiesen: es bedeutet, dass es für jede Matrix $X \in M_n(\mathbb{R})$ eine Folge invertierbarer Matrizen gibt, die gegen X konvergiert).

Wenn zwei stetige Abbildungen auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, sind sie überall gleich. Daher gilt

$$D \det_A(H) = \text{Tr}({}^t \text{comat}(A) \cdot H)$$

auch dann, wenn A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 2

[differenzierbar?, 3+3+4 Punkte]

Sei die Funktion f definiert durch:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Um zu zeigen, dass f in $(0,0)$ stetig ist, muss man beweisen, dass

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Da $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt, hat man

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für $(x,y) \rightarrow (0,0)$ gilt $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$. Also folgt nach dem Sandwichsatz:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Damit ist f in $(0,0)$ stetig. Man hätte auch auf Polarkoordinaten übergehen können.

2. Für die Untersuchung der partiellen Ableitung nach der ersten Variablen betrachtet man den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$$

und prüft, ob dieser für $x \rightarrow 0$ einen Grenzwert besitzt. Es gilt jedoch

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = 1.$$

Also existiert $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und ist gleich 1.

Analog berechnet man für die partielle Ableitung nach der zweiten Variablen:

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Also existiert $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ und ist gleich 0.

3. Wir führen nun einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, f wäre in $(0,0)$ differenzierbar. Dann müsste ihr Differential ℓ die Form

$$\ell(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) h_2 = h_1$$

haben. Dann müsste auch gelten:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \ell(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Setze

$$\Delta(h_1, h_2) = \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \ell(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = -\frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

Für $h > 0$ gilt dann

$$\Delta(h, h) = -\frac{h^3}{(2h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2^{3/2}}.$$

Dies konvergiert nicht gegen 0, wenn $h \rightarrow 0$. Also ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 3

[arctan Gleichung, 3+4+3 Punkte]

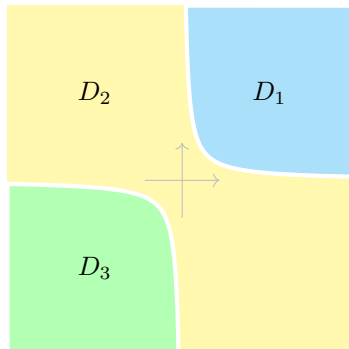
1. Offensichtlich gilt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}.$$

Diese offene Menge lässt sich als Vereinigung von drei wegezusammenhängenden offenen Mengen schreiben:

$$D_1 = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 \mid xy > 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}, \quad D_3 = \{(x, y) \in (-\infty, 0)^2 \mid xy > 1\}.$$

Durch Verkettung ist f von Klasse C^1 auf D .



2. Zur Berechnung der partiellen Ableitungen verwenden wir die Kettenregel. Setze

$$h(x, y) = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Dann gilt für alle $(x, y) \in D$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{(1 - xy) + y(x + y)}{(1 - xy)^2} = \frac{1 + y^2}{(1 - xy)^2}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 + y^2}{(1 - xy)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}.$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1 + y^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2} = 0.$$

Aufgrund der Symmetrie zwischen x und y gilt ebenfalls:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

3. Da D_1 , D_2 und D_3 wegezusammenhängend sind und $df = 0$ gilt, existieren Konstanten C_1, C_2, C_3 , so dass für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $(x, y) \in D_i$ gilt:

$$f(x, y) = C_i.$$

Zur Bestimmung von C_1 betrachten wir für $x > 1$:

$$f(x, 1) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right).$$

Für $x \rightarrow +\infty$ konvergiert die rechte Seite gegen

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi,$$

also ist $C_1 = \pi$.

Wegen der Ungeradheit von f gilt $C_3 = -\pi$. Schließlich ist $C_2 = f(0, 0) = 0$.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

Sie müssen nur 10 Berechnungen (richtig) durchführen, um alle Punkte zu erhalten. Es wird dringend empfohlen, alle Berechnungen durchzuführen!

1. Wahr oder Falsch:

- (a) Wahr
- (b) Falsch
- (c) Falsch
- (d) Wahr
- (e) Wahr
- (f) Falsch
- (g) Wahr
- (h) Wahr
- (i) Wahr
- (j) Wahr

2. Bestimmen Sie das Differential im Punkt a_o der folgenden Funktionen:

- (a) $Df_{(x,y)}(h,k) = e^{xy}(y(x+y)+1)h + e^{xy}(x(x+y)+1)k$
- (b) $Df_{(x,y,z)}(h,k,\ell) = (y+z)h + (x+z)k + (x+y)\ell$
- (c) $Df_{(x,y)}(h,k) = (y \cos x \cdot h + \sin x \cdot k, -\sin x \cdot h)$

3. Begründen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie ihre Jacobi-Matrix.

- (a) Die Funktion ist differenzierbar, da sie aus Polynomen und Sinusfunktionen zusammengesetzt ist, die beide glatt (insbesondere differenzierbar) sind.

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Die Funktion ist differenzierbar, da sie aus Polynomen und dem Logarithmus einer glatten Funktion besteht; außerdem ist $1+x^2 > 0$ für alle x , sodass der Logarithmus wohldefiniert und differenzierbar ist.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 9

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Konvergenz, 3+2+2+3 Punkte]

Für $x \geq 0$ definiert man $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ punktweise auf $\mathbb{R}_+$ konvergiert.
2. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ auf jedem Intervall $[0, A]$ mit $A > 0$ gleichmäßig konvergiert.
3. Überprüfen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. Folgern Sie daraus, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} u_n$ nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$ konvergiert.

Aufgabe 2

[Nicht differenzierbar, 2+2+2+2+2 Punkte]

1. Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.
2. Sei f die Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, definiert durch $f(0, 0) = 0$ und $f(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, wobei p und q von Null verschiedene natürliche Zahlen sind. Für welche Werte von p und q ist diese Funktion stetig?
3. Zeigen Sie, dass im Fall $p + q = 2$ die Funktion f nicht differenzierbar ist.
4. Es sei nun $p + q \geq 3$, und es werde angenommen, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist. Begründen Sie, dass dann zwei Konstanten a und b existieren mit

$$f(x, y) = ax + by + o(\|(x, y)\|).$$

Untersuchen Sie die partiellen Abbildungen $x \mapsto f(x, 0)$ und $y \mapsto f(0, y)$, und zeigen Sie damit, dass $a = b = 0$.

5. Folgern Sie schließlich mithilfe von $x \mapsto f(x, x)$, dass f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist für $p + q = 3$.

Aufgabe 3

[Folge, 2+3+3+2 Punkte]

Für $n \geq 1$ und $x \in]0, 1]$ definiert man

$$f_n(x) = n x^n \ln(x), \quad \text{und} \quad f_n(0) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) auf $[0, 1]$ punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, die zu bestimmen ist.
2. Für $n \geq 1$ setze man anschließend $g_n = f - f_n$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g_n .
3. Folgern Sie daraus, dass die Konvergenz von (f_n) gegen f nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$ ist.
4. Sei $a \in [0, 1[$. Indem man bemerkt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $e^{-1/n} \geq a$ für alle $n \geq n_0$, zeige man, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f auf $[0, a]$ konvergiert.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch?
 - (a) Eine Folge stetiger Funktionen, die auf einem Intervall gleichmäßig konvergiert, hat stets eine stetige Grenzfunktion.
 - (b) Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge garantiert, dass die Grenzfunktion stetig ist, wenn jede Funktion der Folge stetig ist.
 - (c) Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe impliziert punktweise Konvergenz.
 - (d) Wenn eine Funktionenreihe gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert sie auch für jedes Argument absolut.
 - (e) Eine Potenzreihe konvergiert auf ihrem gesamten Konvergenzintervall gleichmäßig.
 - (f) Wenn eine Folge differenzierbarer Funktionen gleichmäßig konvergiert, dann konvergieren auch die Ableitungen gleichmäßig.
 - (g) Wenn eine Folge von Funktionen gleichmäßig konvergiert und jede Funktion integrierbar ist, dann ist die Grenzfunktion integrierbar und das Integral des Grenzwerts ist gleich dem Grenzwert der Integrale.
 - (h) Eine Potenzreihe definiert innerhalb ihres Konvergenzradius eine stetige Funktion.
 - (i) Gleichmäßige Konvergenz stellt sicher, dass man Grenzwerte und unendliche Summen vertauschen darf.
 - (j) Eine gleichmäßig konvergente Folge beschränkter Funktionen hat eine beschränkte Grenzfunktion.
 - (k) Die Ableitung einer Potenzreihe erhält man durch gliedweises Differenzieren innerhalb ihres Konvergenzradius.
 - (l) Für eine Folge von Funktionen f_n gilt: Wenn die Reihe der Suprema von $|f_n|$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum f_n$.
 - (m) Für eine Folge von Funktionen f_n gilt: Wenn die Reihe $\sum f_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe der Suprema von $|f_n|$.
2. Untersuchen Sie die punktweise und gleichmäßige Konvergenz der folgenden Folgen von Funktionen (f_n):
 - (a) $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ auf $\mathbb{R}_+$ und anschließend auf $[a, +\infty[$ mit $a > 0$.
 - (b) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ auf $\mathbb{R}$ und anschließend auf $[a, +\infty[$ mit $a > 0$.
 - (c) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ auf $[a, +\infty[$ mit $a > 0$ und anschließend auf $\mathbb{R}_+$.
 - (d) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ auf $\mathbb{R}_+^*$;
 - (e) $f_n(x) = (\sin x)^n \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$;
 - (f) $f_n(x) = \frac{e^{(n-1)x}}{n}$ auf $\mathbb{R}$ und anschließend auf $] -\infty, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$.

Abgabe: 10.06.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 9

Aufgabe 1

[Konvergenz, 3+2+2+3 Punkte]

1. Die punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}_+$ ist sehr leicht zu zeigen. Für $x = 0$ gilt nämlich $u_n(0) = 0$, was der allgemeine Term einer konvergenten Reihe ist. Für $x > 0$ hat man $0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^2}$, was ebenfalls der allgemeine Term einer konvergenten Reihe ist.
2. Wir zeigen die normale Konvergenz auf $[0, A]$, die die gleichmäßige Konvergenz auf diesem Intervall impliziert. Für alle $x \in [0, A]$ gilt nämlich

$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2},$$

und dies ist der allgemeine Term einer konvergenten Reihe. Daher erlaubt uns der Satz von Weierstraß zu schließen.

3. Es genügt zu schreiben, dass für $n+1 \leq k \leq 2n$ gilt: $n^2 + k^2 \leq 5n^2$, und somit

$$\frac{n}{n^2 + k^2} \geq \frac{1}{5n}.$$

Daraus folgt schließlich

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq n \cdot \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$

4. Es ist schwieriger, die fehlende gleichmäßige Konvergenz zu zeigen. Man kann folgendermaßen vorgehen: Angenommen, die Konvergenz ist gleichmäßig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Dann gilt aber nach der Dreiecksungleichung für alle $n \geq N$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Insbesondere erhält man für $n = N$ und $x = N$ die doppelte Ungleichung

$$\frac{1}{5} \leq \left| \sum_{k=N+1}^{2N} u_k(N) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Wählt man nun $2\varepsilon < \frac{1}{5}$, so ist dies ein Widerspruch.

Aufgabe 2

[Riemannsche ζ -Funktion, 2+2+2+1+2+1+0 Punkte]

1. $(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0$, woraus sich die verlangte Ungleichung ergibt.
2. Zunächst bemerken wir, dass $p + q \geq 2$ gilt.
Nur die Stetigkeit in $(0, 0)$ bereitet Schwierigkeiten. Man schätzt $|f(x, y)|$ wie folgt ab: $|f(x, y)| \leq \frac{|xy| \cdot |x^{p-1}y^{q-1}|}{x^2 - xy + y^2} \leq |x|^{p-1}|y|^{q-1}$.
Der letzte Ausdruck konvergiert gegen 0, außer wenn $p-1 = q-1 = 0$, das heißt außer im Fall $p + q = 2$. Falls also $p + q > 2$, ist die Funktion in $(0, 0)$ stetig und damit auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.
3. Für $p + q = 2$, das heißt $p = q = 1$, gilt dagegen $f(x, x) = 1$, was für $x \rightarrow 0$ nicht gegen 0 konvergiert. Somit ist f in $(0, 0)$ nicht stetig. Ist $p + q = 2$, so ist die Funktion nicht stetig; erst recht kann sie daher nicht differenzierbar sein.

4. Sei nun $p + q \geq 3$, und nehme man an, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist. Dann gilt $f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0)(x, y) + o(\|(x, y)\|)$.
 Die Differentialabbildung ist hier jedoch eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Bezeichnet man ihre Matrix mit $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, so erhält man die verlangte Darstellung.
 Da außerdem $f(x, 0) = 0 = ax + o(|x|)$, folgt aus der Eindeutigkeit der Taylorentwicklung, dass $a = 0$.
 Ebenso erhält man durch Untersuchung der Abbildung $y \mapsto f(0, y)$ die Gleichung $b = 0$.
5. Für $p + q = 3$, folglich gilt $f(x, x) = o(|x|)$.
 Andererseits ist $f(x, x) = x$ (vgl. die vorherige Rechnung), und dies ist kein $o(|x|)$.

Aufgabe 3

[Folge, 2+3+3+2 Punkte]

1. Wir zeigen, dass (f_n) auf $[0, 1]$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert:
- Für $x = 0$ oder $x = 1$ ist $(f_n(x))$ die konstante Folge mit Wert 0.
 - Für $x \in]0, 1[$ konvergiert $(f_n(x))$ gegen 0 durch Vergleich einer polynomialen Folge mit einer geometrischen Folge mit Quotient in $]0, 1[$. Man beachte, dass $\ln x$ in dieser Betrachtung keine Rolle spielt.

2. Für alle $x \in]0, 1]$ gilt

$$g'_n(x) = -n x^{n-1}(n \ln x + 1).$$

Die Ableitung verschwindet bei $e^{-1/n}$, und die Funktion g_n ist wachsend auf $]0, e^{-1/n}[$ und fallend auf $]e^{-1/n}, 1[$. Außerdem gilt $g_n(0) = g_n(1) = 0$.

3. Aus der vorherigen Frage folgt

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| = |(f - f_n)(e^{-1/n})| = e^{-1}.$$

Die Konvergenz ist also nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$.

4. Die Folge $(e^{-1/n})$ konvergiert gegen 1 für $n \rightarrow \infty$. Daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $e^{-1/n} \geq a$. Somit ist für $n \geq n_0$ die Funktion g_n monoton wachsend auf $[0, a]$. Da $g_n(0) = 0$, folgt für alle $x \in [0, a]$ und alle $n \geq n_0$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)| = n a^n |\ln a|.$$

Der rechte Ausdruck konvergiert gegen 0. Daraus folgt, dass (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $[0, a]$ konvergiert.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. Wahr oder falsch?
- (a) Wahr (gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig).
 - (b) Falsch (z. B. punktweise Grenzwert kann unstetig sein).
 - (c) Wahr (gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz).
 - (d) Falsch (gleichmäßige Konvergenz impliziert nicht notwendig absolute Konvergenz).
 - (e) Falsch (im Allgemeinen nur gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen).
 - (f) Falsch (zusätzliche Voraussetzungen nötig, z. B. gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen).
 - (g) Wahr (Vertauschung von Limes und Integral bei gleichmäßiger Konvergenz).
 - (h) Wahr (Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradius stetig).
 - (i) Wahr (bei gleichmäßiger Konvergenz ist Vertauschen von Limes und Summe erlaubt).
 - (j) Wahr (gleichmäßiger Limes beschränkter Funktionen ist beschränkt).
 - (k) Wahr (gliedweise Differentiation innerhalb des Konvergenzradius erlaubt).
 - (l) Wahr (Weierstraßsches Majorantenkriterium).
 - (m) Falsch (Gegenbeispiel: $\sum f_n$ konvergiert punktweise, aber nicht absolut).

2. (a) Die Ungleichung $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ zeigt, dass f_n punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Setze $g(x) = e^{-x} \sin(2x)$. Dann gilt $f_n(x) = g(nx)$. Wenn x über $\mathbb{R}_+$ läuft, läuft auch nx über $\mathbb{R}_+$, und somit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |g(x)| > 0.$$

Die Folge $(\|f_n\|_\infty)$ ist also eine strikt positive Konstante und kann daher nicht gegen 0 konvergieren, wenn $n \rightarrow +\infty$: die Konvergenz ist nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$. Ist jedoch $a > 0$ und $x \geq a$, so gilt

$$|f_n(x)| \leq e^{-na},$$

was die gleichmäßige Konvergenz auf $[a, +\infty[$ zeigt.

- (b) Wenn $x \neq 0$, dann konvergiert $(f_n(x))$ gegen 0 (es handelt sich um eine geometrische Folge mit Quotient in $]0, 1[$). Für $x = 0$ ist die Folge konstant gleich 1. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert somit punktweise gegen die Funktion f , die in 0 den Wert 1 und sonst 0 annimmt. Die Konvergenz kann auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig sein, da jede Funktion f_n stetig ist, die Grenzfunktion jedoch in 0 nicht stetig ist. Dagegen ist die Konvergenz auf Intervallen der Form $[a, +\infty[$ mit $a > 0$ gleichmäßig, denn für alle $x \geq a$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n},$$

und der rechte Ausdruck hängt nicht mehr von x ab und geht gegen 0.

- (c) Zunächst bemerken wir, dass für alle $x \geq 0$ die Folge $(f_n(x))$ gegen 0 konvergiert: offensichtlich für $x = 0$, da die Folge konstant 0 ist, und für $x > 0$ durch die Abschätzung

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 x^2}.$$

Sei nun $a > 0$ fest und $x \geq a$. Dann gilt $|\sin(nx)| \leq 1$ sowie $1 + n^2 x^2 \geq 1 + n^2 a^2$ wegen der Monotonie von $x \mapsto x^2$ auf $[a, +\infty[$. Somit erhält man

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2}.$$

Der rechte Ausdruck hängt nicht von x ab und konvergiert gegen 0. Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen die Nullfunktion auf $[a, +\infty[$.

Außerdem gilt $f_n(1/n) = \frac{\sin(1)}{2}$. Daher

$$\|f_n - 0\|_{\infty, [0, +\infty[} = \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \geq \frac{\sin(1)}{2}.$$

Somit konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $[0, +\infty[$.

- (d) Da

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}},$$

ist klar, dass die Folge (f_n) punktweise gegen 0 auf $\mathbb{R}_+^*$ konvergiert. Zur Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz schreiben wir

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{1}{\sqrt{n}} g(nx),$$

wobei $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ und $g(0) = 0$.

Wir zeigen, dass g beschränkt ist: zunächst ist g stetig auf $[1, +\infty[$ und besitzt dort einen endlichen Grenzwert (gleich 0) für $x \rightarrow +\infty$, also ist g auf $[1, +\infty[$ beschränkt. Außerdem gilt wegen $\sin x \sim x$ für $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

und g ist stetig auf $[0, 1]$, also dort beschränkt. Insgesamt ist g auf $\mathbb{R}_+$ beschränkt. Damit folgt

$$\|f_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} g \right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \|g\|_\infty \rightarrow 0,$$

also gleichmäßige Konvergenz gegen 0 auf $\mathbb{R}_+^*$.

- (e) Für $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ konvergiert $(f_n(x))$ gegen 0, da es sich um eine geometrische Folge mit Quotient in $] -1, 1[$ handelt. Für $x = \frac{\pi}{2} [\pi]$ ist $(f_n(x))$ konstant gleich 0. Somit konvergiert (f_n) punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion. Zur Untersuchung von $\|f_n\|_\infty$ genügt es wegen Periodizität und Symmetrie, sich auf $[0, \pi]$ zu beschränken. Für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1).$$

Die Ableitung verschwindet bei $x_0, x_1 \in [0, \pi]$ mit $\cos^2(x) = \frac{1}{n+1}$. Daher ist f_n wachsend auf $[0, x_0]$, fallend auf $[x_0, x_1]$ und wachsend auf $[x_1, \pi]$. Da $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$, folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \max(|f_n(x_0)|, |f_n(x_1)|) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Da der rechte Ausdruck gegen 0 geht, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen 0 auf $\mathbb{R}$. Weiter gilt

$$\frac{(n-1)x}{n} \rightarrow x,$$

also folgt mit dem Satz über die Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$f_n(x) \rightarrow e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn

$$e^n - f_n(n) = e^n - e^{n-1} = e^n(1 - e^{-1}) \rightarrow +\infty.$$

Dagegen ist die Konvergenz gleichmäßig auf jedem Intervall $] -\infty, b]$. Sei $b \in \mathbb{R}$ und $x \in] -\infty, b]$. Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$\left| \exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) - \exp(x) \right| \leq \left| \frac{(n-1)x}{n} - x \right| \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{|x|}{n} \sup_{t \in I_x} |\exp(t)|,$$

wobei I_x das Intervall zwischen $\frac{(n-1)x}{n}$ und x ist.

- (f) Für $x \in [0, b]$ erhält man

$$\frac{|x|}{n} \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{be^b}{n}.$$

Für $x < 0$ gilt

$$\frac{|x|}{n} \sup_{t \in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{|x|e^{x/2}}{n}.$$

Da die Funktion $x \mapsto |x|e^{x/2}$ auf $] -\infty, 0]$ beschränkt ist, existiert $M > 0$ mit

$$|x|e^{x/2} \leq M.$$

Somit folgt insgesamt

$$\left| \exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) - \exp(x) \right| \leq \frac{\max(be^b, M)}{n},$$

was die gleichmäßige Konvergenz auf $] -\infty, b]$ zeigt.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 10

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[Taylor für Näherungswert, 5+5 Punkte]

1. Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass $\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}$.

Folgern Sie daraus, dass $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$.

2. Sei nun $x > 0$. Zeigen Sie, dass $\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}$.

Bestimmen Sie daraus einen Näherungswert von $\ln(1,003)$ mit einer Genauigkeit von 10^{-8} .

Aufgabe 2

[Riemannsche ζ -Funktion, 2+2+2+1+2+1+0 Punkte]

Die Riemannsche ζ -Funktion ist die Funktion der Variablen $s \in \mathbb{R}$, die durch die Formel

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

definiert ist.

1. Geben Sie den Definitionsbereich von ζ an und zeigen Sie, dass sie auf diesem streng monoton fallend ist.
2. Beweisen Sie, dass ζ auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.
3. Bestimmen Sie $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.
4. Zeigen Sie, dass für jedes $k \geq 1$ und jedes $s > 1$ gilt:

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

5. Folgern Sie daraus, dass $(s-1) \cdot \zeta(s) \rightarrow 1$ für $s \rightarrow 1^+$.

6. Skizzieren Sie den Graphen von ζ .

(Bonus, 0 Punkte) Zeigen Sie, dass ζ konvex ist (das heißt, dass sie zweimal differenzierbar ist und ihre zweite Ableitung positiv ist).

Aufgabe 3

[e ist transzendent, 2+2+2+2+2 Punkte]

Man nehme an, es existieren drei ganze Zahlen a , b und c mit $ae^2 + be + c = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiere man $f(x) = ae^x + ce^{-x}$.

1. Begründen Sie, dass $f(1)$ eine ganze Zahl ist. Zeigen Sie außerdem, dass für jedes $k \geq 0$ die Zahl $f^{(k)}(0)$ eine ganze Zahl ist.
2. Sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es ein $\theta_n \in [0, 1]$ gibt, sodass $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}$ eine ganze Zahl ist.
3. Begründen Sie, dass die Folge $(f^{(n)}(\theta_n))_{n \geq 1}$ beschränkt ist.
4. Zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl $N \geq 1$ gibt, sodass für alle $n \geq N$ $f^{(n)}(\theta_n) = 0$ gilt.
5. Folgern Sie daraus, dass $a = b = c = 0$ gelten muss.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch?

- (a) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^2 , so gelten für die gemischten zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
- (b) Der Satz von Schwarz gilt für jede Funktion, die zweite partielle Ableitungen besitzt, auch wenn diese nicht stetig sind.
- (c) Das Taylorpolynom vom Grad 2 stimmt immer mit der ursprünglichen Funktion überein.
- (d) Die Exponentialfunktion erfüllt $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \frac{(-1)^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Falls eine Funktion f auf einem Intervall, das a enthält, $n+1$ -mal differenzierbar ist, dann ist ihr Taylorpolynom vom Grad n in a eindeutig durch die Werte $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ bestimmt.
- (f) Das Taylorpolynom vom Grad n von $f + g$ in einem Punkt a ist die Summe der Taylorpolynome vom Grad n von f und g in a .
- (g) Die Taylor-Lagrange-Formel stellt den Restterm in der Form $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ dar, wobei ξ zwischen a und x liegt.
- (h) Falls $f^{(n+1)}(t) \geq 0$ für alle t zwischen a und x gilt, dann ist der Taylor-Lagrange-Rest $R_n(x)$ stets nichtnegativ.
- (i) Die Integraldarstellung des Restterms setzt lediglich voraus, dass $f^{(n+1)}$ auf dem betrachteten Intervall existiert und stetig ist.
- (j) Das Taylorpolynom vom Grad n von $\ln(1+x)$ in 0 lautet $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.
- (k) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von $\ln(1+x)$ in 0 ist gleich 1.
- (l) Falls zwei Funktionen dasselbe Taylorpolynom vom Grad n in einem Punkt a besitzen, dann stimmen sie in einer Umgebung von a überein.

2. Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen (der Konvergenzradius muss nicht angegeben werden):

- (a) $\cos x$ in $x = 0$
- (b) $\sin x$ in $x = 0$
- (c) $\frac{1}{1-x}$ in $x = 0$
- (d) $(1+x)^\alpha$ in $x = 0$ für $\alpha > 0$
- (e) $\arctan x$ in $x = 0$ (Hinweis: $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$)
- (f) e^{-1/x^2} in $x = 0$ (die Radius ist 0...) **(2 Punkte)**

Abgabe: 17.06.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 10

Aufgabe 1

[Taylor für Näherungswert, 5+5 Punkte]

1. Setzen wir $f(x) = \cos x$. Dann sind die ersten aufeinanderfolgenden Ableitungen $-\sin, -\cos, \sin, \cos, -\sin$, sodass $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1$ und $|f^{(5)}(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die verlangte Ungleichung ist daher genau die Taylor-Ungleichung der Ordnung 5, angewandt auf f zwischen 0 und a :

$$|R_5(a)| = \left| \frac{1}{4!} \int_0^a f^{(5)}(t)(t-0)^4 dt \right| \leq \frac{1}{4!} \int_0^a |f^{(5)}(t)| \cdot t^4 dt \leq \frac{1}{4!} \int_0^a t^4 dt = \frac{a^5}{5!}$$

Es genügt nun, die vorherige Formel für $a = \frac{1}{2}$ anzuwenden.

2. Bezeichnen wir nun $f(x) = \ln(1+x)$. Es gilt: $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$.

Da $x > 0$, folgt daraus: $\forall t \in [0, x], |f'''(t)| \leq 2$.

Die Taylor-Ungleichung (die angewandt werden kann, da f von Klasse C^3 ist) liefert somit:

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

Beachten wir schließlich, dass $\frac{(0,003)^3}{3} = 9 \times 10^{-9} \leq 10^{-8}$.

Aufgabe 2

[Riemannsche ζ -Funktion, 2+2+2+1+2+1+0 Punkte]

1. Die Reihe, die $\zeta(s)$ definiert, ist eine Riemannsche Reihe. Sie konvergiert genau dann, wenn $s > 1$ ist. Außerdem sind für jedes $n \geq 1$ die Funktionen $s \mapsto n^{-s}$ monoton fallend, und sogar streng fallend für $n \geq 2$. Für $1 < s < t$ gilt daher

$$1 + 2^{-s} > 1 + 2^{-t} \quad \text{und} \quad \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n^t},$$

(wobei die zweite Ungleichung nur eine schwache ist, da man zum Grenzwert übergeht). Durch Addition erhält man

$$\zeta(s) > \zeta(t),$$

was zeigt, dass ζ streng monoton fallend ist.

2. Jede Funktion $s \mapsto n^{-s}$ ist auf ihrem Definitionsbereich stetig. Es genügt zu zeigen, dass die Funktionenreihe auf jedem Intervall der Form $[a, +\infty[$ mit $a > 1$ normal, also gleichmäßig, konvergiert, um die Stetigkeit auf $]1, +\infty[$ zu erhalten. Für alle $s \in [a, +\infty[$ gilt nämlich

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^a},$$

und die rechte Seite ist der allgemeine Term einer konvergenten Zahlenreihe. Dies zeigt die normale Konvergenz von ζ auf $[a, +\infty[$.

3. Da die definierende Reihe von ζ auf $[a, +\infty[$ gleichmäßig konvergiert, darf man den Limes mit der Summe vertauschen und erhält

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^s} = 1,$$

denn für $n \geq 2$ gilt $n^{-s} \rightarrow 0$ für $s \rightarrow +\infty$, während $1^s = 1$.

4. Für $x \in [k, k+1]$ gilt

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

Durch Integration über $[k, k+1]$ erhält man

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^s} \leq \frac{1}{k^s}.$$

Summiert man diese Ungleichungen für k von 1 bis $+\infty$, so folgt

$$\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} \leq \zeta(s).$$

Es gilt jedoch

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1,$$

oder äquivalent

$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq 1 + (s-1).$$

Nach dem Sandwichsatz folgt $(s-1)\zeta(s) \rightarrow 1$ für $s \rightarrow 1$. Insbesondere ist $\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = +\infty$.

5. Nun zeigen wir, dass ζ von Klasse C^2 auf $]1, +\infty[$ ist und dass $\zeta''(s) \geq 0$ für alle $s > 1$. Dazu zeigen wir zunächst die gleichmäßige Konvergenz der abgeleiteten Reihe auf jedem Intervall $[a, +\infty[$ mit $a > 1$. Sei $f_n(s) = n^{-s}$ für $n \geq 1$. Dann gilt

$$f'_n(s) = (-\ln n) n^{-s}.$$

Für $s \in [a, +\infty[$ hat man

$$|f'_n(s)| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

Der rechte Ausdruck ist der allgemeine Term einer konvergenten Reihe. In der Tat gilt für $b \in]1, a[$:

$$n^b \cdot \frac{\ln n}{n^a} \rightarrow 0, \quad \text{also} \quad \frac{\ln n}{n^a} = o(n^{-b}).$$

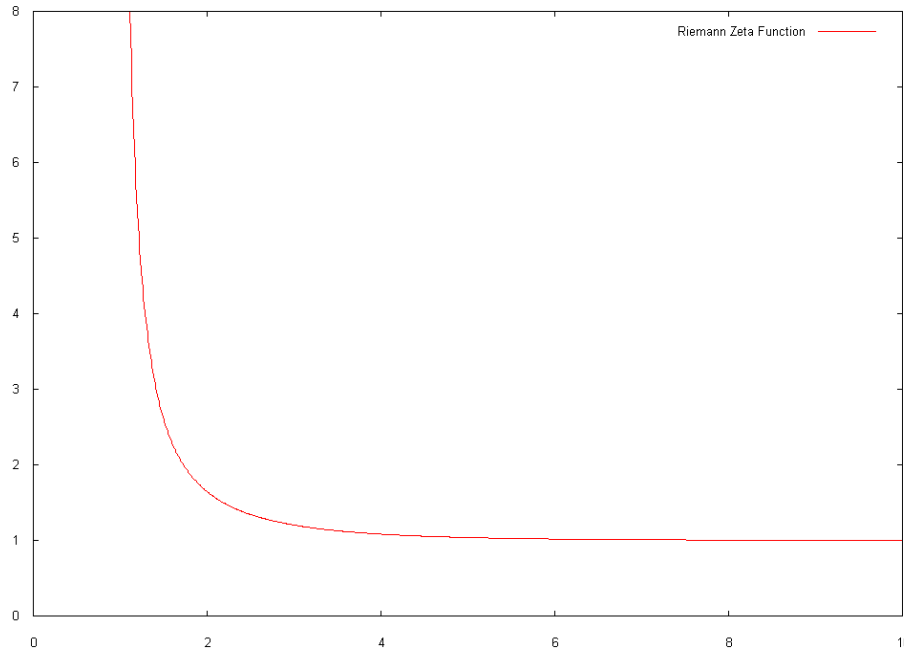
Da $\sum n^{-b}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum \frac{\ln n}{n^a}$. Nach dem Satz über gliedweises Differenzieren folgt, dass ζ auf $]1, +\infty[$ differenzierbar ist und

$$\zeta'(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^s}.$$

Analog zeigt man, dass ζ zweimal differenzierbar ist und

$$\zeta''(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^s}.$$

Da alle Terme dieser Reihe positiv sind, folgt $\zeta''(s) \geq 0$. Somit ist ζ konvex.



6.

Aufgabe 3

[e ist transzendent, 2+2+2+2+2 Punkte]

- Man hat $f(1) = ae + ce^{-1} = e^{-1}(ae^2 + c) = -be^{-1}e = -b$, also ist $f(1)$ eine ganze Zahl. Ferner gilt für jedes $k \geq 0$ $f^{(k)}(x) = ae^x + (-1)^k ce^{-x}$. Daher $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c$, und somit ist $f^{(k)}(0)$ eine ganze Zahl.
- Wir wenden die Taylor-Lagrange-Formel der Ordnung n zwischen 0 und 1 an. Es existiert ein $\theta_n \in (0, 1)$ mit

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n!}.$$

Daraus folgt $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = (n-1)!f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} f^{(k)}(0)$.

Für jedes $k = 0, \dots, n-1$ sind sowohl $\frac{(n-1)!}{k!}$ als auch $f^{(k)}(0)$ ganze Zahlen; ebenso ist $(n-1)!f(1)$ eine ganze Zahl. Daher ist $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n}$ eine ganze Zahl.

- Es gilt

$$|f^{(n)}(\theta_n)| \leq |a|e^{\theta_n} + |c|e^{-\theta_n} \leq |a|e + |c|.$$

Folglich ist die Folge $(f^{(n)}(\theta_n))_{n \geq 1}$ beschränkt.

- Die Folge $\left(\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n}\right)_{n \geq 1}$ ist das Produkt einer beschränkten Folge mit der Folge $(1/n)$, die gegen 0 konvergiert. Daher $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} \rightarrow 0$.

Da alle Glieder dieser Folge ganze Zahlen sind, muss sie ab einem gewissen Rang konstant gleich 0 sein. Es existiert also ein $N \geq 1$, sodass für alle $n \geq N$ $\frac{f^{(n)}(\theta_n)}{n} = 0$, und somit $f^{(n)}(\theta_n) = 0$.

- Angenommen, es gelte nicht $a = b = c = 0$. Dann sind mindestens zwei der drei ganzen Zahlen a, b, c von Null verschieden.

Falls a und c dasselbe Vorzeichen haben, etwa beide nichtnegativ und mindestens eine von ihnen strikt positiv ist, wählen wir ein gerades $n \geq N$. Dann

$$f^{(n)}(\theta_n) = ae^{\theta_n} + ce^{-\theta_n} > 0,$$

im Widerspruch zu $f^{(n)}(\theta_n) = 0$.

Falls a und c entgegengesetzte Vorzeichen haben, wählen wir ein ungerades $n \geq N$. Dann

$$f^{(n)}(\theta_n) = ae^{\theta_n} - ce^{-\theta_n}.$$

Da a und c entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, haben die beiden Summanden dasselbe Vorzeichen; folglich ist $f^{(n)}(\theta_n) \neq 0$, wieder ein Widerspruch.

In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch. Daher bleibt nur die Möglichkeit $a = b = c = 0$.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch?

- (a) **Wahr** (Satz von Schwarz/Clairaut: bei C^2 sind gemischte Ableitungen vertauschbar)
- (b) **Falsch** (Gegenbeispiel: Funktionen mit existierenden, aber nicht stetigen zweiten Ableitungen)
- (c) **Falsch** (z.B. e^x oder nicht-polynomiale Funktionen)
- (d) **Wahr** (Taylorreihe von e^{-x} ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$)
- (e) **Wahr** (die Taylor-Koeffizienten sind durch die Ableitungen festgelegt).
- (f) **Wahr** (Ableitungen und Taylorpolynome sind linear).
- (g) **Wahr** (dies ist genau die Taylor-Lagrange-Formel).
- (h) **Wahr** (der Restterm hat dann dasselbe Vorzeichen wie $(x-a)^{n+1}$).
- (i) **Wahr** (Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ genügt für die Integraldarstellung).
- (j) **Falsch** (die Vorzeichen müssen alternieren).
- (k) **Wahr** (Singularität bei $x = -1$).
- (l) **Falsch** (gleiche Taylorpolynome implizieren nicht gleiche Funktionen).

2. Man berechnet wiederholt die Ableitungen und wertet sie bei 0 aus.

- (a) Es gilt $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$. Daher

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

- (b) Es gilt $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$. Daher

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

- (c) Man hat $\sum_{n=0}^m x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$. Für $|x| < 1$ folgt im Grenzübergang $m \rightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

- (d) Es gilt $((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Durch wiederholtes Ableiten erhält man

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

- (e) Aus einer vorherigen Aufgabe folgt $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Durch Integration erhält man

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

- (f) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat die n -te Ableitung die Form $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-1/x^2}$, wobei P_n ein Polynom ist. Da e^{-1/x^2} für $x \rightarrow 0$ schneller gegen 0 konvergiert als jede Potenz von $1/x$ wächst, gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$. Folglich ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$. Damit verschwinden alle Taylor-Koeffizienten in 0, und die Taylorreihe von f um 0 ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 11

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

[eine Schachtel, 10 Punkte]

Man möchte eine oben offene Schachtel in Form eines rechteckigen Quaders herstellen. Das Volumen dieser Schachtel soll gleich $0,5 \text{ m}^3$ sein, und um die verwendete Materialmenge zu optimieren, soll die Summe der Flächeninhalte der Seitenflächen möglichst klein sein. Welche Abmessungen muss man für die Herstellung der Schachtel wählen?

Aufgabe 2

[mit vorgegebene Hesse-Matrix, 5+5 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^2 .

1. Man nehme an, dass die Hesse-Matrix von f in jedem Punkt verschwindet.
Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $\forall x \in \mathbb{R}^n$, mit $f(x) = \langle a, x \rangle + b$.
2. Man nehme an, dass die Hesse-Matrix von f in jedem Punkt dieselbe ist.
Zeigen Sie, dass es ein $u \in S(\mathbb{R}^n)$, ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \langle a, x \rangle + b$$

(Hier bezeichnet $S(\mathbb{R}^n)$ den Raum der symmetrischen linearen Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$.)

Aufgabe 3

[Extrema auf einer eingeschränkten Definitionsmenge, 2+3+2+3 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{x - 3}.$$

Wir wollen die Extremstellen von f auf der Geraden L bestimmen, die senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht und durch den Punkt $(0, 4)$ verläuft.

1. Berechnen Sie den Gradienten ∇f . Bestimmen Sie daraus die kritischen Punkte von f (ohne zu entscheiden, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt).
2. Sei $(a, b) \in L$. Begründen Sie, dass im Fall $f(a, b) = \max\{f(x, y) ; (x, y) \in L\}$ oder $f(a, b) = \min\{f(x, y) ; (x, y) \in L\}$, der Gradient $\nabla f(a, b)$ orthogonal zu L ist. Folgern Sie daraus, dass ein solcher Extrempunkt auf L die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ erfüllt.
3. Begründen Sie, dass $b = a + 4$, und bestimmen Sie daraus die möglichen Werte von (a, b) .
4. Berechnen Sie für jeden der gefundenen Punkte (a, b) den Ausdruck $v^\top (\text{Hess } f(a, b))v$, wobei v ein Richtungsvektor der Geraden L ist. Folgern Sie daraus, ob der Punkt (a, b) auf der Geraden L ein Maximum, ein Minimum oder keinen Extrempunkt (Sattelpunkt) der Einschränkung von f auf L darstellt.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch?
 - (a) Die Hesse-Matrix einer skalarwertigen Funktion ist immer symmetrisch, sofern die Funktion von Klasse C^2 ist.
 - (b) Die Hesse-Matrix enthält alle partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Funktion.
 - (c) Ist die Hesse-Matrix an einem Punkt, an dem der Gradient 0 ist, positiv definit, so liegt dort ein striktes lokales Minimum vor.
 - (d) Ist die Hesse-Matrix an einem Punkt, an dem der Gradient 0 ist, negativ definit, so liegt dort ein striktes lokales Maximum vor.
 - (e) Jeder Punkt, an dem der Gradient 0 ist, ist entweder ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.
 - (f) In $\mathbb{R}^n$ kann ein lokales Extremum nur an Punkten auftreten, an denen der Gradient verschwindet oder nicht definiert ist.
 - (g) Der Term der Ordnung 2 der Taylorentwicklung in einem Punkt a kann geschrieben werden als $\frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a)$.
2. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:
 - (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
 - (b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
 - (c) $f(x, y) = x^3 + y^3$
 - (d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$
 - (e) $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$
 - (f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x + y + z)$ **(2 Punkte)**

Abgabe: 24.06.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 11

Aufgabe 1

[eine Schechtel, 10 Punkte]

Bezeichnen wir mit x , y und z die drei Abmessungen der Schachtel. Ihr Volumen ist also durch $xyz = 0,5$ gegeben. Man möchte die Funktion $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ minimieren (die obere Fläche wurde entfernt). Ersetzt man z durch $\frac{1}{2xy}$, so muss man das Minimum der Funktion zweier Variablen $g(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ auf der offenen Menge $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ bestimmen.

Die partiellen Ableitungen von g sind $\frac{\partial g}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2}$ und $\frac{\partial g}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2}$.

Man überprüft dann ohne Mühe, dass der einzige kritische Punkt von g auf der offenen Menge U der Punkt $(1, 1)$ ist. Es bleibt nun zu zeigen, dass g tatsächlich ein globales Minimum in $(1, 1)$ auf U besitzt. Dazu kann man bemerken, dass $g(1, 1) = 3$.

Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 1.$$

Damit ergibt sich die Hesse-Matrix

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(1, 1)$ erhält man

$$H_g(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Hesse-Matrix ist $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, daher sind ihre Eigenwerte 3 und 1. Da beide positiv sind, folgt, dass $(1, 1)$ tatsächlich ein Minimum ist.

Damit hat die zu konstruierende Schachtel die Abmessungen $x = 1$, $y = 1$ und $z = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

[mit vorgegebene Hesse-Matrix, 5+5 Punkte]

1. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Die partiellen Ableitungen von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind auf dem konvexen Raum $\mathbb{R}^n$ alle gleich Null. Daher ist diese Funktion auf $\mathbb{R}^n$ konstant. Sei a_i ihr konstanter Wert. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist das Differential von f gegeben durch

$$\langle Df(x), h \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \sum_{i=1}^n a_i h_i.$$

Durch Integration erhält man für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \langle Df(tx), x \rangle dt = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i x_i dt = f(0) + \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Diese Formel lässt sich schreiben als $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, wobei $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, und $b = f(0) \in \mathbb{R}$.

2. Zunächst gilt: Hat f die behauptete Form, so ist die Hesse-Matrix von f gerade die Matrix des Endomorphismus u bezüglich der kanonischen Basis.

Umgekehrt sei u der Endomorphismus, dessen Matrix bezüglich der kanonischen Basis die Hesse-Matrix von f ist. Dieser Endomorphismus ist selbstadjungiert, da die Hesse-Matrix symmetrisch ist.

Betrachten wir die Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle$.

Die Funktion $f - g$ ist von Klasse C^2 auf $\mathbb{R}^n$, und ihre Hesse-Matrix verschwindet in jedem Punkt. Nach Teil (a) existieren daher ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + \langle a, x \rangle + b$. Somit

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle u(x), x \rangle + \langle a, x \rangle + b.$$

Aufgabe 3 [Extrema auf einer eingeschränkten Definitionsmenge, 2+3+2+3 Punkte]
 Die Gerade L ist orthogonal zum Vektor $(1, 1)$ und geht durch $(3, 2)$. Daher besitzt sie die Gleichung $x + y = 5$.

1. Es gilt $f(x, y) = (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{x-3}$.

Die partiellen Ableitungen sind $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - 1 - \frac{1}{(x-3)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 1$.

Folglich $\nabla f(x, y) = \left(y - 1 - \frac{1}{(x-3)^2}, x - 1 \right)$.

Die kritischen Punkte von f erfüllen $\nabla f(x, y) = 0$. Also $x - 1 = 0$, $y - 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = 0$.

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 1$. Einsetzen liefert $y - 1 - \frac{1}{4} = 0$, also $y = \frac{5}{4}$.

Der einzige kritische Punkt von f ist somit $(1, \frac{5}{4})$.

2. Sei $(a, b) \in L$ ein Extrempunkt der Einschränkung von f auf L .

Dann verschwindet die Richtungsableitung von f entlang jeder Tangentialrichtung von L . Folglich steht der Gradient $\nabla f(a, b)$ senkrecht auf L .

Da L orthogonal zum Vektor $(1, 1)$ ist, ist jeder Normalenvektor zu L ein Vielfaches von $(1, 1)$. Daher existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(a, b) = \lambda(1, 1)$.

Insbesondere sind die beiden Komponenten des Gradienten gleich: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

3. Da $(a, b) \in L$, gilt $-a + b = -0 + 4$, also $b = a + 4$.

Aus Teil (2) folgt $b - 1 - \frac{1}{(a-3)^2} = a - 1$. Mit $b = 5 - a$ erhält man $a + 3 - \frac{1}{(a-3)^2} = a - 1$, also $4 = \frac{1}{(a-3)^2}$. Multiplikation mit $(a - 3)^2$ liefert $4(a - 3)^2 = 1$. Somit ist die einzige reelle

Lösung $a = \frac{5}{2}$ und $b = \frac{13}{2}$, oder $a = \frac{7}{2}$ und $b = \frac{15}{2}$.

4. Durch zweimaliges Ableiten erhält man

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-3)^3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist ein Richtungsvektor der Geraden L : $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Daher ergibt sich allgemein

$$v^\top (\text{Hess } f(x, y)) v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-3)^3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{(x-3)^3} + 2.$$

Für den Punkt $(a, b) = (\frac{5}{2}, \frac{13}{2})$ erhält man $v^\top (\text{Hess } f(a, b)) v = -16 + 2 = -14 < 0$. Folglich besitzt dieser Punkt auf der Geraden L ein Maximum.

Für den Punkt $(a, b) = (\frac{7}{2}, \frac{15}{2})$ erhält man $v^\top (\text{Hess } f(a, b)) v = 16 + 2 = 18 > 0$. Folglich besitzt dieser Punkt auf der Geraden L ein Minimum.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle]

1. (a) Wahr
 (b) Falsch (Die Hesse-Matrix enthält nur zweite, nicht erste Ableitungen)
 (c) Wahr (Standardkriterium der zweiten Ableitung im $\mathbb{R}^n$)
 (d) Wahr (analoges Kriterium für negative Definitheit)
 (e) Falsch (Sattelpunkt möglich, z.B. $f(x, y) = x^2 - y^2$ bei $(0, 0)$)
 (f) Wahr (Notwendige Bedingung: $\nabla f = 0$ oder nicht definiert)
 (g) Wahr (quadratischer Term der Taylorentwicklung: $\frac{1}{2}(x - a)^T H_f(a)(x - a)$)
2. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:
 (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

$$\nabla f(x, y) = (2x + y - 3, x + 2y - 6)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{positiv definit})$$

Kritischer Punkt:

$$2x + y - 3 = 0, \quad x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 3)$$

Da H_f positiv definit ist: striktes lokales (und globales) Minimum bei $(0, 3)$.

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y, 4y - 2x - 2)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (\det = 4 > 0, \quad f_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow \text{positiv definit})$$

Kritischer Punkt:

$$2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y, \quad 4y - 2x - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1)$$

Also striktes lokales Minimum bei $(1, 1)$.

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2, 3y^2)$$

Kritischer Punkt:

$$(0, 0)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0, 0) = 0$$

Keine Definitheit $\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0, 0)$, kein Extremum.

(d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

$$\nabla f(x, y) = (2(x - y) + 3(x + y)^2, -2(x - y) + 3(x + y)^2)$$

Kritische Punkte: Subtraktion:

$$4(x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Einsetzen:

$$3(2x)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

Hessian:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 6(x + y) & -2 + 6(x + y) \\ -2 + 6(x + y) & 2 + 6(x + y) \end{pmatrix}$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (\det = 0)$$

Keine Definitheit $\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0, 0)$.

(e) $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

$$\nabla f(x, y) = (-2x + 2x^3, 2y)$$

Kritische Punkte:

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad -2x + 2x^3 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0)\}$$

Hessian:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 + 6x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $(0, 0)$: Eigenwerte $(-2, 2) \Rightarrow$ Sattelpunkt - $(\pm 1, 0)$: Eigenwerte $(4, 2) \Rightarrow$ strikte lokale Minima

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x + y + z)$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y + z - 4, x + 2y + z - 4, x + y + 2z - 4)$$

Kritischer Punkt:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1$$

Hessian:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{positiv definit})$$

Also striktes globales Minimum bei $(1, 1, 1)$.

Mathematik für Anwender – Wintersemester 2025

Übungsblatt 12

Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Hinweis: Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt C^1 -Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist, stetig differenzierbar ist und ihre Umkehrabbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 1 [Polynom in einfache reelle Nullstellen zerfallend, 3+4+4 Punkte]
Ein Polynom P vom Grad n heißt *in einfache reelle Nullstellen zerfallend*, wenn es genau n verschiedene reelle Nullstellen $\mu_1, \dots, \mu_n$ besitzt. In diesem Fall gilt $P(\mu_i) = 0$ und $P'(\mu_i) \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Sei Q ein in einfache reelle Nullstellen zerfallendes Polynom und seien $\mu_1 < \dots < \mu_n$ seine Nullstellen. Ferner sei $U = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 < \dots < \lambda_n\}$. Man erinnere daran, dass der Raum der Polynome vom Grad höchstens n , bezeichnet mit $\mathbb{R}_n[X]$, isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_n[X] \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (P, \lambda) \longmapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der partiellen Abbildung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$.
2. Folgern Sie, dass es eine Umgebung V_0 von Q in $\mathbb{R}_n[X]$ und eine Abbildung $\bar{\lambda}: V_0 \longrightarrow U$ der Klasse C^∞ gibt, so dass für jedes $P \in V_0$ gilt $\varphi(P, \bar{\lambda}(P)) = 0$.
3. Zeigen Sie, dass die Menge der in n einfache reelle Nullstellen zerfallenden Polynome eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}_n[X]$ ist.

Aufgabe 2 [Satz von implizite Funktionen, 5+5 Punkte]

1. Sei $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, \quad xyz - 1).$$

Sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine Abbildung $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

2. Überprüfen Sie, dass die Gleichung

$$e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = -1$$

die Variable y in einer Umgebung des Punktes $(0, 1)$ als Funktion von x definiert. Zeigen Sie, dass diese Funktion in einer Umgebung von $x = 0$ eine Taylorentwicklung beliebiger Ordnung besitzt. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung dieser Funktion bis zur Ordnung 2.

Aufgabe 3 [Tangentialebene, 2+3+3+2 Punkte]

Es sei $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3,$$

und sei S die Fläche mit der Gleichung $f(x, y, z) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass die Fläche S in einer Umgebung des Punktes $(1, 1, 1)$ durch eine Gleichung der Form $z = \varphi(x, y)$ beschrieben werden kann, wobei φ eine Funktion der Klasse C^∞ ist, die in einer Umgebung von $(1, 1)$ definiert ist.
2. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an S im Punkt $(1, 1, 1)$.
3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von φ in einer Umgebung des Punktes $(1, 1)$.
4. Bestimmen Sie die Lage von S relativ zu ihrer Tangentialebene.

Aufgabe 4[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch?
 - (a) Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte.
 - (b) Eigenvektoren einer reellen symmetrischen Matrix, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal.
 - (c) Die Determinante einer reellen symmetrischen Matrix ist stets positiv.
 - (d) Eine reelle symmetrische Matrix kann komplexe Eigenwerte besitzen.
 - (e) The Satz von Implizite Funktionen liefert Bedingungen dafür, dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ die Variable y als Funktion von x definiert.
 - (f) Für die Anwendung von the Satz von Implizite Funktionen muss die Funktion F in einer Umgebung des betrachteten Punktes stetig differenzierbar sein.
 - (g) Gilt $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = 0$, so ist the Satz von Implizite Funktionen stets auf den Punkt (a, b) anwendbar.
 - (h) Ist die Jacobi-Matrix bezüglich der abhängigen Variablen an einem Punkt invertierbar, so erlaubt the Satz von Implizite Funktionen lokal die Darstellung dieser Variablen als Funktionen der übrigen Variablen.
 - (i) The Satz von Implizite Funktionen liefert eine explizite Formel für die implizit definierte Funktion.
 - (j) The Satz von Implizite Funktionen gilt nur für Funktionen von zwei Variablen.
2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|ab| < 1$.
 - (a) **(2 Punkte)** Sei $v \in \mathbb{R}$. Definieren Sie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = x + a \sin(v - b \sin x).$$

Zeigen Sie, dass g eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ist.

- (b) **(2 Punkte)** Sei

$$f(x, y) = (x + a \sin y, y + b \sin x).$$

Zeigen Sie, dass f ein C^1 -Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst ist.

3. **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

an jedem Punkt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ einen lokalen C^1 -Diffeomorphismus definiert, dass f jedoch kein globaler C^1 -Diffeomorphismus ist.

4. **(3 Punkte)** Es sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Zeigen Sie, dass das Bild von f eine offene Menge ist, die eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist.

Abgabe: 01.07.2026 vor 23:59

Mathematik für Anwender – Loesungblatt 12

Aufgabe 1

[Polynom in einfache reelle Nullstellen zerfallend, 3+4+4 Punkte]

1. Die Jacobi-Matrix dieser partiellen Abbildung ist einfach die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} Q'(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q'(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q'(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

2. Es gilt $\varphi(Q, \mu_1, \dots, \mu_n) = 0$. Da die Nullstellen von Q einfach sind, gilt außerdem

$$Q'(\mu_i) \neq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Nach dem Ergebnis der vorherigen Frage ist die Jacobi-Matrix bezüglich der Variablen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ am Punkt $(Q, \mu_1, \dots, \mu_n)$ invertierbar. Daher kann der Satz über implizite Funktionen angewendet werden.

Folglich existieren eine Umgebung V_0 von Q in $\mathbb{R}_n[X]$, eine Umgebung U_0 von $(\mu_1, \dots, \mu_n)$, die in U enthalten ist, sowie eine Abbildung $\bar{\lambda} : V_0 \rightarrow U_0$ der Klasse C^∞ , so dass für alle $(P, \lambda) \in V_0 \times U_0$ gilt:

$$\varphi(P, \lambda) = 0 \iff \lambda = \bar{\lambda}(P).$$

Insbesondere gilt für jedes $P \in V_0$:

$$\varphi(P, \bar{\lambda}(P)) = 0.$$

3. Für jedes $P \in V_0$ ist $\bar{\lambda}(P)$ die Liste aller Nullstellen von P . Da $\bar{\lambda}(P) \in U$, sind diese Nullstellen paarweise verschieden und geordnet. Somit besitzt P genau n einfache reelle Nullstellen. Damit haben wir zu jedem Polynom $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, das in n einfache reelle Nullstellen zerfällt, eine Umgebung V_0 von Q in $\mathbb{R}_n[X]$ gefunden, so dass jedes Polynom aus V_0 ebenfalls n einfache reelle Nullstellen besitzt. Daraus folgt, dass die Menge aller Polynome aus $\mathbb{R}_n[X]$, die n einfache reelle Nullstellen besitzen, eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}_n[X]$ ist.

Aufgabe 2

[Satz von implizite Funktionen, 5+5 Punkte]

1. Es genügt, den Satz über implizite Funktionen anzuwenden. Dazu muss gezeigt werden, dass die partielle Ableitung von f bezüglich der Variablen y und z im Punkt (x_0, y_0, z_0) ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^2$ ist. Mit anderen Worten, es ist zu zeigen, dass die folgende Matrix A invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir diese Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist $\det(A) = -2x_0(y_0^2 + z_0^2)$.

Da $x_0 y_0 z_0 = 1$, folgt insbesondere $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$. Somit gilt auch $y_0^2 + z_0^2 > 0$, und daher $\det(A) \neq 0$.

Die Matrix A ist also invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren daher eine offene Umgebung $I \subset \mathbb{R}$ von x_0 und eine Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

2. Sei $f(x, y) = e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + 2y - x - 3 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -1 \neq 0.$$

Da außerdem $f(0, 1) = 0$, ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar. Es existieren daher zwei offene Intervalle I und J mit $0 \in I$ und $1 \in J$ sowie eine Funktion $g : I \rightarrow J$ der Klasse C^1 , so dass

$$\forall (x, y) \in I \times J : f(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

Da f sogar von Klasse C^∞ ist, ist auch g auf I von Klasse C^∞ . Insbesondere besitzt g in 0 Taylorentwicklungen beliebiger Ordnung; die Entwicklung zweiter Ordnung lautet

$$g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Es ist bereits bekannt, dass $g(0) = 1$.

Zur Bestimmung von $g'(0)$ und $g''(0)$ differenzieren wir die Gleichung

$$e^{xg(x)} + g(x)^2 - xg(x) - 3g(x) + 2x + 1 = 0$$

zweimal.

Erste Ableitung:

$$(g(x) + xg'(x))e^{xg(x)} + 2g(x)g'(x) - g(x) - xg'(x) - 3g'(x) + 2 = 0.$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert:

$$1 + 2g'(0) - 1 - 3g'(0) + 2 = 0 \implies g'(0) = 2.$$

Zweite Ableitung:

$$(g(x) + xg'(x))^2 e^{xg(x)} + (2g'(x) + xg''(x))e^{xg(x)} + 2g'(x)^2 + 2g(x)g''(x) - g'(x) - xg''(x) - 3g''(x) = 0.$$

Auswertung bei $x = 0$ ergibt:

$$1 + 4 + 8 + 2g''(0) - 2 - 2 - 3g''(0) = 0 \implies g''(0) = 9.$$

Damit ist die Taylorentwicklung von g in 0 bis zur Ordnung 2:

$$g(x) = 1 + 2x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

Aufgabe 3

[Tangentialebene, 2+3+3+2 Punkte]

1. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -y^2 + 3z^2 \implies \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 2 \neq 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen liefert somit eine direkte Antwort auf die Frage.

2. Da $(1, 1, 1)$ kein kritischer Punkt von f ist, besitzt die Fläche S in $(1, 1, 1)$ eine Tangentialebene, deren Gleichung durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)(y - 1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)(z - 1) = 0$$

gegeben ist.

Eine kurze Berechnung der partiellen Ableitungen zeigt, dass die Tangentialebene die Gleichung

$$(x - 1) - 5(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \iff x - 5y + 2z + 2 = 0$$

hat.

Dieses Ergebnis kann auch aus der Darstellung $z = \varphi(x, y)$ hergeleitet werden: Die Gleichung der Tangentialebene lautet dann

$$z - 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

Die partiellen Ableitungen von φ lassen sich durch implizites Differenzieren der Beziehung $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ bestimmen.

3. Es gilt

$$x^2 - xy^3 - y^2\varphi(x, y) + \varphi(x, y)^3 = 0.$$

Wir leiten zweimal nach x ab und erhalten zunächst

$$2x - y^3 - y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi(x, y)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

und anschließend

$$2 - y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 6\varphi(x, y) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 3\varphi(x, y)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Auswertung in $(1, 1)$, unter Verwendung von $\varphi(1, 1) = 1$, liefert

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(1, 1) = -\frac{7}{4}.$$

Analog erhält man durch zweimaliges Ableiten nach y :

$$-3xy^2 - 2y\varphi(x, y) - y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 3\varphi(x, y)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

und

$$-6xy - 2\varphi(x, y) - 4y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 6\varphi(x, y) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 3\varphi(x, y)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Auswertung in $(1, 1)$ ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = \frac{5}{2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(1, 1) = -\frac{39}{4}.$$

Zur Bestimmung der gemischten Ableitung differenzieren wir z.B.

$$-3xy^2 - 2y\varphi(x, y) - y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 3\varphi(x, y)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

nach x und erhalten

$$-3y^2 - 2y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + 6 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi(x, y)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Einsetzen in $(1, 1)$ liefert

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(1, 1) = \frac{19}{4}.$$

4. Die Hesse-Matrix von φ in $(1, 1)$ hat die Determinante

$$-\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{39}{4} \right) - \left(\frac{19}{4} \right)^2 < 0.$$

Die beiden Eigenwerte dieser Matrix haben daher nicht dasselbe Vorzeichen. Mit

$$\varphi(1 + u, 1 + v) = d\varphi(1, 1)(u, v) + H(1, 1)(u, v) + o(u^2 + v^2)$$

folgt, dass S die Tangentialebene in $(1, 1, 1)$ schneidet.

Aufgabe 4

[Berechnungen in Hülle und Fülle, 1×10 Punkte]

1. Wahr oder falsch?
 - (a) Wahr (Spektralsatz)
 - (b) Wahr (Orthogonalität von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten)
 - (c) Falsch ($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat Determinante -1)
 - (d) Falsch (reelle symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte)
 - (e) Wahr (genau dies ist die Aussage von the implicit function theorem)
 - (f) Wahr (die Voraussetzungen verlangen stetige Differenzierbarkeit)
 - (g) Falsch (the implicit function theorem verlangt $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$)
 - (h) Wahr (invertierbare Jacobi-Matrix ist die zentrale Voraussetzung)
 - (i) Falsch (Existenz und Eindeutigkeit, aber keine explizite Formel)
 - (j) Falsch (gilt auch für Funktionen von mehreren Variablen)
2. (a) Zum Beweis dieses Ergebnisses zeigt man zunächst, dass g stetig ist (dies ist offensichtlich), und anschließend, dass g streng monoton wachsend ist. Tatsächlich ist g differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g'(x) = 1 - ab \cos x \cos(v - b \sin x) > 0$, da $|ab| < 1$ gilt. Somit ist g eine streng monoton wachsende Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $g(\mathbb{R})$. Da außerdem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

folgt, dass g eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ ist.

- (b) Zunächst bemerken wir, dass f von Klasse C^1 ist. Die Jacobi-Matrix von f ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & a \cos y \\ b \cos x & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Determinante (Jacobian) $\det Df(x, y) = 1 - ab \cos x \cos y > 0$. Nach dem globalen Umkehrsatz genügt es daher zu zeigen, dass f eine Bijektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist. Dazu sei $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ beliebig, und wir zeigen, dass die Gleichung $f(x, y) = (u, v)$ eine eindeutige Lösung besitzt. Es gilt

$$f(x, y) = (u, v) \iff \begin{cases} x + a \sin(v - b \sin x) = u, \\ y = v - b \sin x. \end{cases}$$

Aus der vorherigen Frage folgt, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x + a \sin(v - b \sin x) = u$, nämlich $x = g^{-1}(u)$. Daraus ergibt sich $y = v - b \sin(g^{-1}(u))$. Somit ist f eine Bijektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ und damit ein C^1 -Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst.

3. Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Die Jacobi-Matrix von f im Punkt (x_0, y_0) ist

$$\begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist $\det J_f(x_0, y_0) = 4x_0^2 + 4y_0^2 > 0$. Damit ist nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ein lokaler C^1 -Diffeomorphismus. Allerdings ist f kein globaler C^1 -Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ auf $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, da f nicht injektiv ist. Beispielsweise gilt $f(1, 1) = f(-1, -1) = (0, 2)$.

4. Zunächst ist es leicht zu sehen, dass das Bild von f nicht ganz $\mathbb{R}^3$ ist: insbesondere kann der Punkt $(0, 0, 0)$ nicht erreicht werden, da die Exponentialfunktion stets strikt positiv ist. Um zu zeigen, dass $f(\mathbb{R}^3)$ offen ist, genügt es zu überprüfen, dass die Differentiale von f in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ invertierbar sind. Die Jacobi-Matrix von f ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix berechnet man beispielsweise durch Entwicklung nach der letzten Zeile und erhält $\det(A) = -4e^{2y+2z} - 4e^{2x+2z} < 0$. Sie ist somit niemals null, also ist das Differential von f in jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ eine invertierbare lineare Abbildung. Damit folgt die Behauptung.